

THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE NANCY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

René HUSSON

PREMIERE THESE : DETERMINATION DES IMPEDANCES D'UN SYSTEME DE CONDUCTEURS CYLINDRIQUES PAR UNE ANALOGIE A CONSTANTES REPARTIES.

DEUXIÈME THESE : PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ : ETUDE DES CONSTANTES DIELECTRIQUES DANS LES MILIEUX HETEROGENES.

Soutenues le **25 AVR** 1963, devant la Commission d'Examen

Président . : M. J. BARRIOL
Examineurs : { MM. A. FRUHLING
E. GUDEFIN
G. CHAMPIER
R. GUILLIEN

UDART & CLEMENT

RELIEURS

11, RUE SAINTE-ANNE, 11

TÉLÉPH. 52.80.09 - NANCY

THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE NANCY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

René LEBLANC



PREMIÈRE THÈSE : DÉTERMINATION DES IMPÉDANCES D'UN SYSTÈME DE CONDUCTEURS CYLINDRIQUES PAR UNE ANALOGIE A CONSTANTES RÉPARTIES.

DEUXIÈME THÈSE : PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ : ÉTUDE DES CONSTANTES DIELECTRIQUES DANS LES MILIEUX HÉTÉROGÈNES.

1953, devant la Commission d'Examen

Soutenu le

Président : M. J. BARRIOL
 Examinateurs : M. A. FRUHLING
 F. GUERIN
 G. CHAMPIER
 R. GUILLEN

UNIVERSITE DE NANCY - FACULTE DES SCIENCES

Doyen : M. ROUBAULT

1° Assesseur : M. AUBRY

2° Assesseur : M. VEILLET

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT - DELSARTE - URION -

Professeurs honoraires : MM. GUTTON - CROZE - RAYBAUD - LAFFITTE
LERAY - JOLY - LAPORTE - EICHHORN - CAPELLE - GODEMENT -
DUBREIL - L. SCHWARTZ - DIEUDONNE - de MAILLEMANN - LONG-
CHAMBON - LETORT - DODE - GAUTHIER - GOUDET - OLMER -
CORNUBERT - CHAPELLE - GUERIN - CHEVALLIER - WAHL -

Maîtres de Conférences honoraires : MM. RAUX - LIENHART -

PROFESSEURS

MM.

URION	Chimie biologique	HILLY	Géologie
DELSARTE	Analyse supérieure	LE GOFF	Génie chimique
ROUBAULT	Géologie	CHAPON	Chimie biologique
VEILLET	Biologie animale	HEROLD	Chimie industrielle
ECHEVIN	Botanique	SCHWARTZ	Exploit. minière
BARRIOL	Chimie théorique	GAYET	Physiologie
BIZETTE	Physique	MANGENOT	Phytopathologie
GUILLIEN	Electronique	MALAPRADE	Chimie
GIBERT	Chimie physique	HADNI	Physique
HERVE	Calcul dif. et intégr	DELAMARE	DEBOUTTEVILLE Zoologie
LEGRAS	Mécanique rationnelle	BONVALET	Mécanique physique
DAVID	Chimie organique	Mme ROIZEN	Physique
BOLFA	Minéralogie	KERN	Minéralogie
NICLAUSE	Chimie	BASTICK	Chimie
FAIVRE	Physique appliquée	DUCHAUFOR	Pédologie
AUBRY	Chimie minérale	NEEL	Chimie ind. organique
DUVAL	Chimie	GARNIER	Agronomie
COPPENS	Radiogéologie	WEPPE	Minéralogie appliquée
FRÜHLING	Physique	BERNARD	Géologie appliquée
SUHNER	Physique expérim.	CHAMPIER	Physique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.

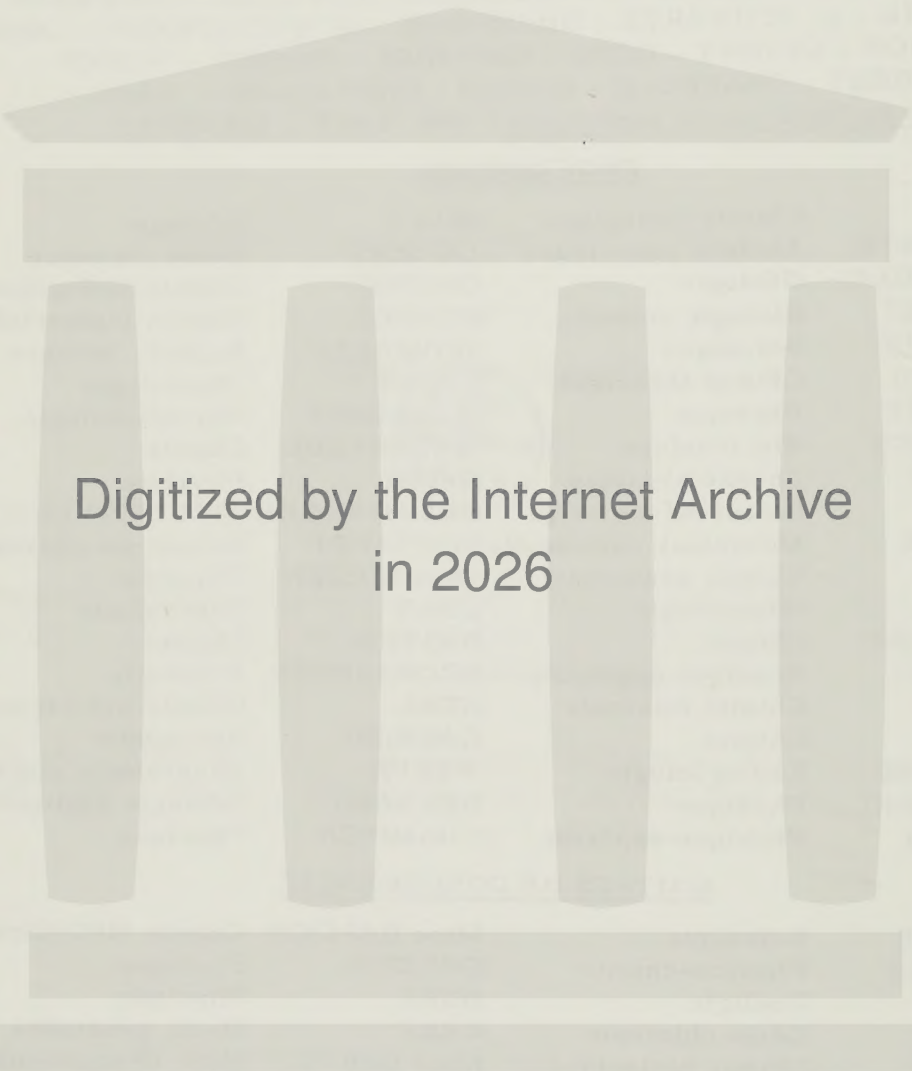
WERNER	Botanique	Mme BASTICK	Chimie MPC (Epinal)
REGNIER	Physico-chimie	GUDEFIN	Physique
CONDE	Zooligie	HORN	Physique
GOSSE	Génie chimique	CERF	Math. générales
GAY	Chimie biologique	Mme HERVE	Math. (Propédeutique)
ROCCI	Géologie	FRENTZ	Biologie animale
VUILLAUME	Psychophysiologie	AUROUZE	Géologie
PLAN	Mécanique physique	FELDEN	Physique MPC (Epinal)
MARI	Chimie (ISIN)	LAFON	Physique (ISIN)
		N.	Phys. théor. et nucl.

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

MM.

EYMARD	Math (Propédeutique)	DEVIOT	Physique du solide
DANYSZ	Mécanique phys. (ISIN)	DEPAIX	Mathématiques
		Melle HUET	Analyse supérieure

Secrétaire Principal : M. CARON.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547403_0004

AVANT-PROPOS

Ce travail, effectué dans le Laboratoire de Servomécanismes et d'Analogies de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique de Nancy, a été proposé par Monsieur E. GUDEFIN, à qui nous sommes infiniment reconnaissants de l'aide constante et efficace qu'il a bien voulu nous prodiguer, tant dans les domaines théoriques que pratiques.

Nous tenons tout particulièrement à remercier Monsieur A. FRÜHLING, des critiques constructives qu'il a formulées depuis le début de nos recherches, au cours des conférences bimensuelles de notre Laboratoire, et de l'appui efficace qu'il nous a apporté lors de l'acquisition du matériel nécessaire à la mise en œuvre de celles-ci.

Nous remercions également Monsieur S. ROIZEN, qui nous a initiés aux techniques de l'évaporation métallique sous vide, et sans l'aide compétente duquel ce travail n'aurait pu être mené à bien.

Nous adressons nos plus vifs remerciements à Monsieur J. BARRIOL qui a bien voulu accepter la présidence de notre jury d'examen, ainsi qu'à Messieurs G. CHAMPIER et R. GUILLIEN, qui ont bien voulu en faire partie.

Nous remercions également tous nos camarades de Laboratoire pour l'ambiance cordiale qu'ils ont su créer autour de nous, et qui a été un facteur déterminant de la réussite de nos recherches.

Nous remercions Messieurs LARAGE et VIGNERON, dont le concours sympathique, le travail soigné, et le dévouement, ont grandement facilité notre tâche.

Nous exprimons aussi nos remerciements à Madame NOUVIAN pour sa compétence dévouée et souriante.

Nous remercions enfin le personnel du service Mécanique pour son aide précieuse.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.

CHAPITRE I.

DETERMINATION DE LA MATRICE IMPEDANCE LINEIQUE
D'UN SYSTEME DE CONDUCTEURS CYLINDRIQUES EN RE-
GIME QUASI-STATIONNAIRE p. 1

I. I. - INTRODUCTION..... p. 1

I. II. - PROPRIETES DE LA FONCTION (x, y, t) p. 2

I. III. - MATRICE IMPEDANCE D'UN SYSTEME DE CONDUCTEURS CYLINDRIQUES p. 4

I. IV. - ETUDE DE DISTRIBUTIONS SIMPLES p. 10

CHAPITRE II.

METHODES NUMERIQUES ET ANALOGIE A CONSTANTES
LOCALISEES p. 20

II. I. - INTRODUCTION p. 20

II. II. - DETERMINATION DE LA REPARTITION DU FLUX DANS
ENCOCHE RECTANGULAIRE PAR UNE METHODE
NUMERIQUE p. 20

II. III. - ANALOGIE A CONSTANTES LOCALISEES..... p. 27

CHAPITRE III.

ANALOGIE A CONSTANTES REPARTIES p. 33

III. I. - INTRODUCTION..... p. 33

III. II. - BASES THEORIQUES DE L'ANALOGIE A CONSTANTES
REPARTIES p. 33

III. III. - MISE EN ŒUVRE DE L'ANALOGIE p. 38

III. IV. - LIMITES DE VALIDITE DE LA METHODE ANALOGIQUE p. 43

CHAPITRE IV.

RESULTATS EXPERIMENTAUX p. 54

IV. I. - VERIFICATION DE LA METHODE p. 54

IV. II. - APPLICATION DE LA METHODE ANALOGIQUE A DES
ENCOCHES PARTICULIERES p. 65

IV. III. - APPLICATION DE LA METHODE ANALOGIQUE AU CALCUL DE LA REACTANCE DE FUITE ET DE LA RESISTANCE DES ENROULEMENTS D'UN MOTEUR ASYNCHRONE	p. 69
CONCLUSION.....	p. 76

INTRODUCTION

Cette étude constitue une suite logique des travaux effectués par Monsieur E. GUDEFIN en magnétostatique plane, pour étudier analogiquement la répartition du potentiel-vecteur dans le cas où les variations dans le temps sont assez lentes pour que les phénomènes d'induction soient négligeables, et les répartitions du courant uniformes.

Le potentiel-vecteur φ $\vec{n}$ parallèle à la direction $\vec{n}$ de l'axe du système est alors donné en fonction de la densité de courant i $\vec{n}$,

$$\Delta\varphi + \mu i = 0 \quad \text{avec} \quad e = \rho i \quad \text{pour la loi d'OHM,}$$

où e est le champ appliqué au conducteur de résistivité ρ .

Nous considérerons ici le cas général où dans l'expression de la loi d'OHM intervient le champ électromoteur d'induction $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, ce qui donne

$$\Delta\varphi + \mu i = 0$$

$$e = \rho i + \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Ce système dans lequel les équations sont couplées par $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, est encore susceptible d'une résolution analogique, à condition d'utiliser dans un réseau de résistance des capacités qui traduisent l'existence du terme de diffusion. Mais cette méthode ne permet d'étudier facilement que des domaines de forme simple. Nous avons donc été conduits à la généraliser par l'utilisation de constantes réparties, qui n'entraînent plus de difficultés particulières aux limites, quelle que soit leur configuration.

Cette analogie utilise la correspondance numérique entre la fonction φ et le potentiel v sur une armature résistante d'un condensateur plan, dont l'autre armature est conductrice dans une disposition suggérée par EG. et EO. GILBERT qui ne l'ont cependant appliquée

qu'à une distribution exclusivement poissonnienne. Très récemment, elle a été citée de nouveau par K. SCHÖNBACHER, mais sans mention d'aucune application.

La méthode que nous avons ainsi développée associe la perméabilité magnétique et la résistivité du milieu initial, respectivement à la résistivité superficielle de la couche résistante qui le représente, et à la capacité du condensateur, ce qui se prête particulièrement bien au cas des conducteurs environnés d'un milieu très perméable.

Ce cas est par exemple celui des conducteurs des machines électriques pour lesquelles on est réduit, si les formes sont quelconques, à l'emploi de formules approchées pour en déterminer l'impédance. [I] [II] [III] [IV]

CHAPITRE I

DETERMINATION DE LA MATRICE IMPEDANCE LINEIQUE D'UN SYSTEME DE CONDUCTEURS CYLINDRIQUES EN REGIME QUASI-STATIONNAIRE

I. I - INTRODUCTION.

Les équations fondamentales de la distribution du champ d'induction $\vec{B}$ associé à la distribution du courant i sont, dans un milieu de perméabilité μ , de résistivité ρ

$$\Delta \vec{A} + \mu \vec{i} = 0$$
$$\vec{E} = \rho \vec{i} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

où $\vec{A}$ est le potentiel-vecteur dont dérive $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, et $\vec{E}$ le champ appliqué.

Nous nous limiterons dans la suite au cas d'une distribution cylindrique d'axe Oz, composée de domaines en nombre fini dans lesquels μ , ρ et la permittivité ϵ sont uniformes, et nous nous bornerons aux régimes sinusoïdaux de pulsation ω .

Puisqu'alors le champ électrique est exclusivement axial, et le champ magnétique transversal, il suffira de considérer un plan de section droite Ox, Oy du système.

Ainsi, en désignant par $\vec{n}$ le vecteur unitaire de Oz, avec $\vec{A} = \varphi \vec{n}$; $\vec{i} = i \vec{n}$; $\vec{E} = e \vec{n}$, les équations fondamentales deviennent

$$\Delta \varphi + \mu i = 0 \quad (\text{I. I, 1})$$

$$e = \rho i + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (\text{I. I, 2})$$

soit

$$\Delta \varphi - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mu}{\rho} e = 0 \quad (\text{I. I, 3})$$

ou

$$\Delta \bar{\varphi} - j \frac{\mu}{\rho} \omega \bar{\varphi} + \frac{\mu}{\rho} \bar{e} = 0 \quad \text{en régime sinusoïdal}$$

Nous supposons enfin que l'intensité globale du courant à travers la section droite S est nulle

$$\iint_S \vec{i} \, dS = 0 \quad (\text{I. I, 4})$$

En effet, la fonction $\varphi(x, y, t)$ n'est définie en toute rigueur qu'à cette condition.

Par exemple, l'utilisation du potentiel logarithmique, lorsque μ est uniforme,

$$\varphi = -\frac{\mu}{2\pi} \iint_{S_t} i \operatorname{Log} r \, dS$$

ne permet de définir des inductances linéiques propres et mutuelles que si (I. I, 4) est satisfaite. Dans le cas où μ dépend de x et de y , φ n'est plus logarithmique, mais n'est toujours déterminée de façon unique que si $\iint_{S_t} \vec{i} \, dS = 0$.

Nous sommes donc conduits à poser $\varphi = 0$ à l'infini dans la section droite que nous considérons, puisque nous savons que φ ne dépend que de la densité de courant i d'après la relation (I. I, 1).

I. II - PROPRIETES DE LA FONCTION $\varphi(x, y, t)$.

I. II. 1 - Signification physique de la fonction φ .

E. GUDEFIN a montré [1] que les lignes sur lesquelles φ reste constant sont les lignes de force du champ d'induction $\vec{B}$. En effet, puisque

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \varphi \wedge \vec{n} \quad (\text{I. II, 1})$$

$\vec{B}$, $\operatorname{grad} \varphi$ et $\vec{n}$ forment un trièdre trirectangle.

Or, $\operatorname{grad} \varphi$ est dirigé suivant la normale en M à la ligne $\varphi = \text{constante}$, donc $\vec{B}$ est tangente à cette courbe.

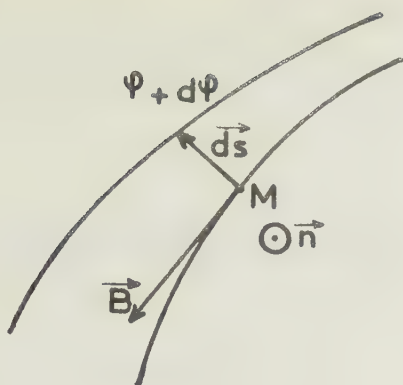


Fig. I. II, 1

La grandeur φ représente donc le flux linéique de l'induction magnétique à travers le rectangle qui s'appuie sur ds .

I. II. 2 - Réfraction des lignes équiflux au passage d'un milieu de perméabilité magnétique μ_1 à un milieu de perméabilité μ_2 .

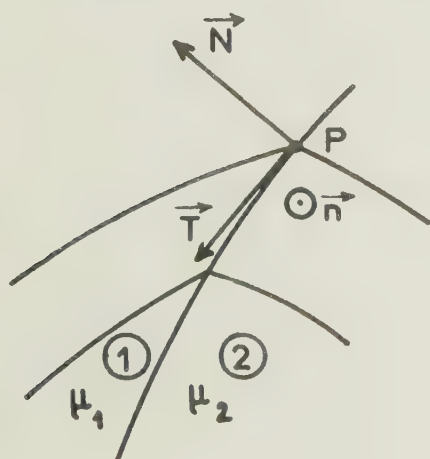


Fig. I. II, 2

$$\vec{N} \wedge \vec{n} = \vec{T} \quad \text{et} \quad \vec{T} \wedge \vec{n} = \vec{N}$$

donc
$$\vec{B} = \frac{\partial \varphi}{\partial N} \vec{T} + \frac{\partial \varphi}{\partial T} \vec{N}$$

La continuité des composantes tangentielles du champ magnétique s'exprime par

$$\frac{B_T}{\mu_1} = \frac{B_T}{\mu_2} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) \textcircled{1} = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) \textcircled{2} \quad (\text{I. II, 2})$$

Exprimons le flux d'induction dF à travers une surface $d\vec{S}$, construite sur le vecteur unitaire $\vec{n}$ et sur le vecteur $d\vec{s}$ du plan x, y

$$dF = \vec{B} \cdot d\vec{S} = [\overrightarrow{\text{grad}} \varphi \wedge \vec{n}] [\vec{ds} \wedge \vec{n}]$$

$$\text{car } d\vec{S} = d\vec{s} \wedge \vec{n}$$

$$dF = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \cdot d\vec{s} = d\varphi$$

La relation (I. II, 1) donne

$$\vec{B} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \vec{N} + \frac{\partial \varphi}{\partial T} \vec{T} \right) \wedge \vec{n}$$

où $\vec{N}$ et $\vec{T}$ sont les vecteurs unitaires de la normale et de la tangente à la surface de séparation des deux milieux, au point considéré, d'où

$$\vec{B} = \frac{\partial \varphi}{\partial N} \vec{N} \wedge \vec{n} + \frac{\partial \varphi}{\partial T} \vec{T} \wedge \vec{n}$$

Comme $\vec{T}$, $\vec{N}$ et $\vec{n}$ forment un trièdre trirectangle, on a

En particulier, si μ_2 est infini, on a $(\frac{\partial \varphi}{\partial N})_{(1)} = 0$, à condition que $(\frac{\partial \varphi}{\partial N})_{(2)}$ reste fini, ce qui est toujours le cas, sauf en des points singuliers.

I. III. - MATRICE IMPEDANCE D'UN SYSTEME DE CONDUCTEURS CYLINDRIQUES.

I. III. 1 - Définition générale.

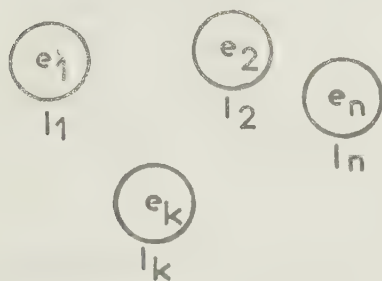


Fig. I. III, 1

Considérons un système de conducteurs cylindriques $1, 2, \dots, k, n$ auxquels on applique des tensions $e_1, e_2, \dots, e_k, \dots, e_n$. Soient $I_1, I_2, \dots, I_k, \dots, I_n$ les courants qui les traversent.

Supposons $\sum_{k=1}^{k=n} I_k = 0$ et bornons-nous au régime sinusoïdal de pulsation ω .

Les lois qui définissent φ (I. I, 1) et (I. I, 2) sont linéaires. Comme φ ne dépend que des courants, la fonction flux φ relative à la distribution totale des courants est la somme des flux partiels. En particulier si φ_k est la contribution du courant I_k dans le conducteur k ,

$$\varphi = \sum_1^n \varphi_k \quad (\text{I. III, 1})$$

En tout point du j ième conducteur, on a

$$e_j = \rho i_j + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

soit

$$\bar{e}_j = \rho \bar{i}_j + j \omega \bar{\varphi} = \rho \bar{i}_j + j \omega \sum_{k=1}^{k=n} \bar{\varphi}_{kj}$$

Le bilan des puissances dans le conducteur j est donc

$$\int_{S_j} \bar{e}_j \bar{i}_j^* dS = \bar{e}_j \bar{I}_j^* = \int_{S_j} (\rho \bar{i}_j + j \omega \bar{\varphi}) \bar{i}_j^* dS$$

On en déduit

$$\bar{e}_j = \frac{1}{\bar{I}_j^*} \int_{S_j} (\rho \bar{i}_j + j\omega \sum_{k=1}^{k=n} \varphi_{kj}) \bar{i}_j^* dS$$

d'où

$$\bar{e}_j = \frac{1}{\bar{I}_j^*} \int_{S_j} (\rho \bar{i}_j + j\omega \bar{\varphi}_{jj}) \bar{i}_j^* dS + \frac{1}{\bar{I}_j^*} \int_{S_j} j\omega \sum_{k \neq j} \varphi_{kj} \bar{i}_j^* dS \quad (\text{I. III, 2})$$

La linéarité impose

$$\bar{e}_j = \sum_k \bar{Z}_{jk} \bar{I}_k \quad (\text{I. III, 3})$$

où $\bar{Z}_{jk}$ est l'impédance mutuelle entre le conducteur j et le conducteur k , donc pour le système entier

$$|\bar{e}| = |\bar{Z}| |\bar{I}| \quad (\text{I. III, 4})$$

La relation (I. III, 2) donne alors pour les éléments de la matrice impédance $|\bar{Z}|$ les valeurs

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}_{jj} &= \frac{1}{\bar{I}_j^*} \int (\rho \bar{i}_j + j\omega \bar{\varphi}_{jj}) \bar{i}_j^* dS \\ \bar{Z}_{jk} &= \frac{1}{\bar{I}_j^* \bar{I}_k} \int j\omega \sum \bar{\varphi}_{kj} \bar{i}_j^* dS \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. III, 5})$$

Lorsque la fréquence est assez basse pour que la distribution des courants soit uniforme, le calcul de $|\bar{Z}|$ est parfois possible. Mais il n'en est pas de même dans le cas général. Cependant, lorsque le système de conducteurs peut être divisé en deux sous-systèmes par une ligne $\varphi = \text{constante}$, en dehors des conducteurs, il est possible de définir par rapport à cette ligne des impédances partielles souvent plus aisément calculables, dont nous donnerons une détermination analogique, et à partir desquelles on déduit l'impédance totale.

I. III. 2. - Cas où la fréquence est très basse.

Les courants sont pratiquement répartis uniformément. On détermine alors séparément les parties réelles et imaginaires de l'impédance de chaque conducteur.

En effet, les équations (I. I, 1) et (I. I, 2) se réduisent à :

$$\vec{e} = \rho \vec{i} \quad \text{et} \quad \Delta \bar{\varphi} + \mu \vec{i} = 0$$

lorsque $j\omega \bar{\varphi}$ est négligeable devant e .

Les résistances sont données par $R = \rho/S$ et les inductances propres par $L = \int \varphi i dS / (\int i dS)^2$. Il est donc possible de déterminer la matrice réactance $j |X| = j\omega |Z|$ et d'en déduire la matrice impédance $|Z| = |R| + j |X|$.

Les éléments de certaines matrices $|Z|$ ont été calculées de manière détaillée par E. GUDEFIN dans sa thèse [2].

I. III. 3. - Cas de deux systèmes de conducteurs séparés par une ligne équiflux particulière.

Dans la distribution des lignes équiflux, particularisons une ligne qui satisfait à la seule condition de séparer les conducteurs du milieu en deux groupes I et II, sans en couper aucun. Appelons L_0 cette ligne, D et D' les domaines contenant I et II.

Soit φ_0 le flux sur cette ligne (L_0) pour une distribution donnée des champs appliqués. De (I. I, 2), on déduit

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \rho \vec{i} + j\omega \vec{\Phi} \quad \text{avec} \\ \vec{\Phi} &= \vec{\varphi} - \bar{\varphi}_0 \quad \text{et} \quad \vec{E} = \vec{e} - j\omega \bar{\varphi}_0 \end{aligned} \quad (\text{I. III, 6})$$

valable pour chaque conducteur de l'un ou de l'autre groupe. Les solutions de (I. I, 2) dans chacun des domaines D et D' ne sont liées que par l'intermédiaire de φ_0 . Donc, les solutions de (I. III, 6) dans ces domaines sont indépendantes. En effet, une fois φ_0 imposé sur la ligne (L_0), celle-ci a, entre les domaines D et D' une propriété d'écran analogue à celle d'une surface équipotentielle électrostatique. Ce parallélisme se déduit de l'analogie entre les équations de Poisson

$$\Delta \varphi + \mu i = 0 \quad \text{et} \quad \Delta V + q/\epsilon = 0$$

(où q est la densité de charge), qui régissent dans les deux cas les distributions de φ et de V , ainsi que de la correspondance entre les conditions aux limites.

Par ailleurs, il est possible de remplacer l'action des courants du groupe I dans le domaine D', qui ne dépend ainsi que de la valeur φ_o sur (L_o) , par l'action d'une nappe superficielle (C_o) de courant, qui coïncide avec (L_o) et qui transporte le courant total égal à la somme des courants du groupe I comme le montre immédiatement le théorème d'Ampère, l'influence étant totale. Puisque la résistivité d'une nappe superficielle de courant est forcément nulle (pour que la puissance dissipée par effet Joule reste finie), la tension $\bar{e} = \rho \bar{i} + j \omega \bar{\varphi}_o$ à appliquer à cette nappe (C_o) se réduit à $\bar{e}_o = j \omega \bar{\varphi}_o$.

Dans chacun des domaines D et D', les matrices impédances indépendantes l'une de l'autre, définies comme en (I. III, 4) sont

$$|\bar{E}_I| = |\bar{Z}_I| |\bar{I}_I| \quad \text{et} \quad |\bar{E}_{II}| = |\bar{Z}_{II}| |\bar{I}_{II}|$$

Nous les nommerons impédances partielles par rapport à φ_o . Pour en déduire l'impédance relative à l'espace entier que constituent les domaines D et D' en parallèle vis-à-vis de (L_o) , considérons les admittances définies par

$$|\bar{I}_I| = |\bar{Y}_I| |\bar{E}_I| = |\bar{Y}_I| |\bar{e}_I - j \omega \bar{\varphi}_o|$$

$$|\bar{I}_{II}| = |\bar{Y}_{II}| |\bar{E}_{II}| = |\bar{Y}_{II}| |\bar{e}_{II} - j \omega \bar{\varphi}_o|$$

La matrice admittance totale est donc telle que

$$|\bar{I}| = |\bar{Y}_I + \bar{Y}_{II}| |\bar{E}| = |\bar{Y}_I + \bar{Y}_{II}| |\bar{e} - j \omega \bar{\varphi}_o|$$

Sa forme sera telle que

$$\begin{vmatrix} I_I \\ I_k \\ I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_I & 0 \\ 0 & Y_{II} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_I \\ E_n \end{vmatrix} \quad \text{où } Y_I \text{ et } Y_{II} \text{ sont en évidence.}$$

L'ensemble est ainsi représenté par le schéma équivalent de la figure I, III, 2 qui met en évidence l'action séparatrice de la courbe (L_o) par l'intermédiaire de $j \omega \bar{\varphi}_o$.

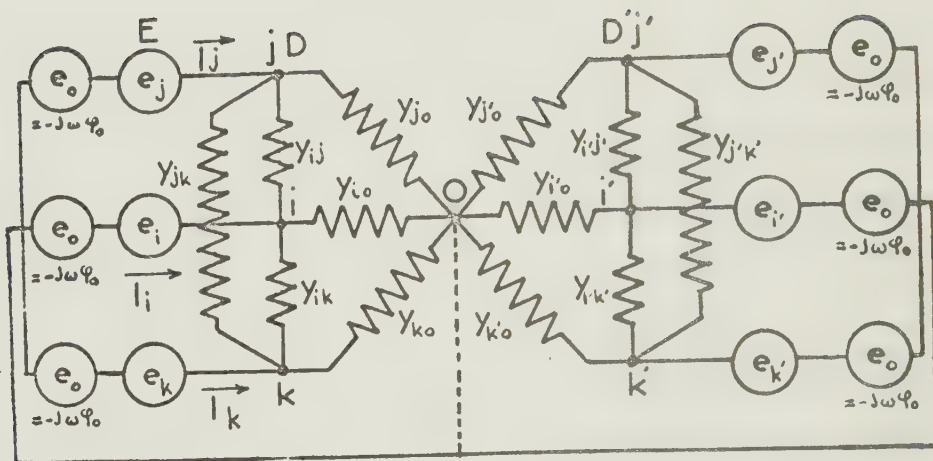


Fig. I. III, 2.

Pour revenir à l'impédance totale sans aucune particularisation des domaines D et D', éliminons dans le schéma précédent la matérialisation de (L_o) par une transformation étoile-polygone, qui fasse justement disparaître l'origine (0) de l'étoile.

Soient y_{ij} l'admittance entre les conducteurs C_i et C_j d'un des domaines, et y_{io} l'admittance entre C_i et la nappe C_o comme les explicite le schéma équivalent.

Le courant I_i est alors

$$I_i = \sum_{j \neq i} y_{ij} (e_i - e_j) + y_{io} (e_i - j \omega \varphi_o)$$

Les éléments des matrices Y_I ou Y_{II} sont donc

$$Y_{ii} = y_{io} + \sum_{j \neq i} y_{ij}$$

$$Y_{ij} = -y_{ij}$$

L'étoile de centre (0), de sommets i, j, k , dans D d'une part et i', j', k' dans D' d'autre part est équivalente au polygone de sommets $ijki'j'k'$ entre lesquels sont disposées les admittances

$$y'_{ij} = \frac{y_{io} y_{j'o}}{\sum_I y_{io} + \sum_{II} y_{j'o}} \quad y'_{ij} = \frac{y_{io} y_{j'o}}{y_{io} + y_{j'o}}$$

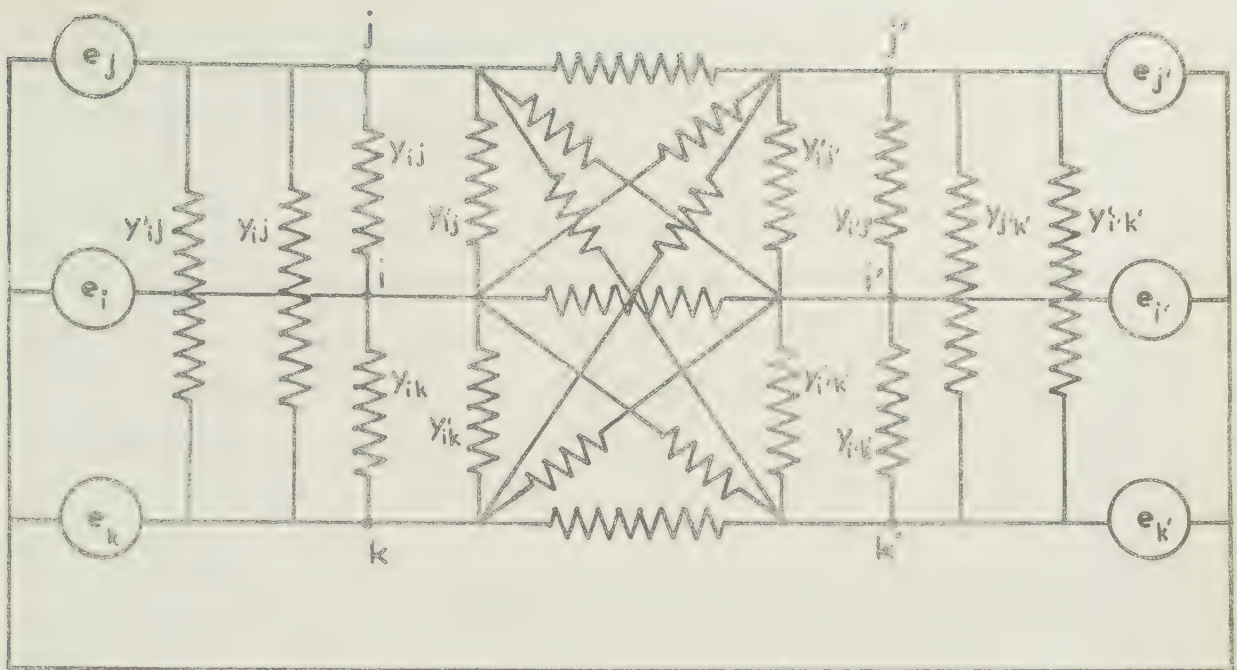


Fig. I. III. 3.

Le courant I_i dans cette disposition est

$$I_i = \sum (y_{ij} + y'_{ij}) (e_i - e_j) + \sum y'_{ij'} (e_i - e_{j'})$$

soit

$$I_i = e_i \left[\sum y_{ij} + \sum y'_{ij} + \sum y'_{ij'} \right] - e_j \sum (y_{ij} + y'_{ij}) - e_{j'} \sum y'_{ij'}$$

Les éléments de la matrice admittance du système considéré dans son ensemble suivant

$$\begin{vmatrix} I_i \\ I_j \\ I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots Y'_{ij} \dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_i \\ e_j \\ e_n \end{vmatrix}$$

sont ainsi

$$Y'_{ij} = -y_{ij} - y'_{ij} = Y_{ij} - y'_{ij}$$

pour des couples de points situés tous deux dans (D) ou dans (D'), et

$$Y'_{ij} = -y'_{ij'}$$

pour des couples de points situés l'un dans (D), l'autre dans (D').

La matrice admittance de l'ensemble se déduit donc simplement des matrices admittances partielles relatives à la ligne équiflux

φ_0

Nous donnerons une détermination analogique simple des admittances partielles qui par ailleurs interviennent directement dans de nombreux problèmes d'électrotechnique.

Les calculs exposés précédemment sont valables pour une fréquence donnée. Mais si la position dans l'espace de la ligne (L_0) est indépendante de la fréquence, le schéma équivalent de la Fig. I. III. 2 garde sa validité quelle que soit la fréquence. C'est en particulier le cas pour les systèmes de révolution, ou quand cette ligne est imposée par la configuration de milieux infiniment perméables.

I. IV. - ETUDE DE DISTRIBUTIONS SIMPLES.

I. IV. 1. - Cas de l'encoche d'une machine électrique.

I. IV. 1, 1. - Introduction.

Moyennant des hypothèses restrictives, il est possible de déterminer analytiquement l'impédance linéique d'un conducteur placé dans une encoche rectangulaire ouverte [3], et aussi, bien qu'approximativement, dans des encoches trapézoïdales et circulaires.

Nous traiterons d'abord complètement le cas de l'encoche rectangulaire et du conducteur cylindrique de révolution.

Dans tous les autres cas, on est réduit à l'emploi de formules empiriques.

C'est pourquoi nous avons mis au point une méthode analogique qui utilise les propriétés de la fonction φ et permet de déterminer l'impédance linéique d'une encoche quelconque.

I. IV. 1, 2. - Hypothèses fondamentales.

Nous supposons que

- la machine est suffisamment longue pour négliger les effets des extrémités et considérer sa section droite comme celle d'un milieu cylindrique.

- la perméabilité des matériaux magnétiques qui entourent l'encoche dans laquelle sont placés les conducteurs, est infinie, ainsi que leur résistivité (ce qui est réalisé par le feuilletage).

- les diélectriques sont parfaits.

I. IV. 1, 3. - Méthode d'étude.

Considérons une section droite d'une machine à pôles lisses. satisfaisant aux hypothèses précédentes, et dont l'entrefer est petit devant les dimensions des ouvertures d'encoche (Fig. I, IV. 1).

Séparons les encoches de l'entrefer, comme sur les figures I. IV. 2 et I. IV. 3. Le système représenté par la figure I. IV. 3 a le même comportement global qu'une machine idéale sans pertes par effet Joule, sans fuites et sans pertes électromagnétiques [4].

Puisque l'entrefer est très étroit et le fer très perméable, la ligne de séparation entre l'entrefer et l'encoche est une ligne équipotentielle où $\varphi = \varphi_0$. Soient φ_1 et φ_2 les distributions du flux de part et d'autre de cette ligne, à l'intérieur et à l'extérieur de l'encoche.

Considérons sur la ligne $\varphi = \varphi_0$ la nappe superficielle de courant (C_0).

Déterminons dans ces conditions les impédances des conducteurs situés dans l'encoche en considérant la répartition de la fonction

$$\bar{\Phi} = \varphi_1 - \varphi_0, \text{ solution de}$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Phi} + \mu \bar{i} &= 0 \\ \bar{E} &= \rho \bar{i} + j \omega \bar{\Phi} \end{aligned}$$

avec

$$\bar{\Phi} = \varphi_1 - \varphi_0 \quad \text{et} \quad \bar{E} = \bar{c} - j \omega \bar{\varphi}_0$$

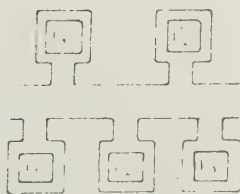


Fig. I. IV. 1



Fig. I. IV. 2

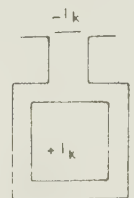


Fig. I. IV. 3

I. IV. 1, 4. - Quadripôle équivalent à un conducteur d'une encoche rectangulaire.

Soit une encoche rectangulaire ouverte contenant n conducteurs rectangulaires de même largeur que l'encoche. (Fig. I. IV. 4).

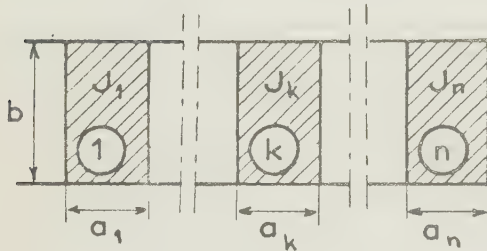


Fig. I. IV. 4

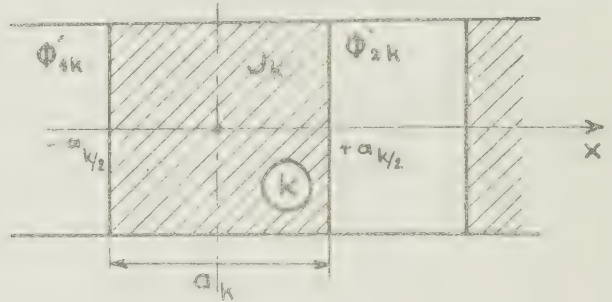


Fig. I. IV. 5

Puisque le fer est infiniment perméable, nous avons $\frac{\partial \Phi}{\partial N} = 0$ sur tout le pourtour de l'encoche. Les lignes d'induction sont donc parallèles au fond de l'encoche. Il en résulte que Φ ne dépendra plus que de la distance x à l'entrefer.

Considérons le conducteur d'ordre k et de longueur a_k suivant x et prenons l'origine des x en son milieu.

La relation (I. I. 3) devient :

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}}{dx^2} - j\omega \frac{\mu}{\rho} \bar{\Phi} + \frac{\mu}{\rho} \bar{E} = 0 \quad (\text{I. IV. 1})$$

Posons

$$\bar{\Phi}' = \bar{\Phi} - \frac{\bar{E}}{j\omega} \quad \text{et} \quad \theta = x \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\rho}} = x K \sqrt{j}$$

(I. IV. 1) devient alors

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}'}{d\theta^2} - \bar{\Phi}' = 0 \quad (\text{I. IV. 2})$$

La solution générale de cette équation est

$$\bar{\Phi} = A \operatorname{ch} \theta + B \operatorname{sh} \theta \quad (\text{I. IV. 3})$$

Posons $\alpha_k = a_k \sqrt{j} K$, et soient $\bar{\Phi}'_{1k}$ et $\bar{\Phi}'_{2k}$ les valeurs de $\bar{\Phi}'$ aux deux extrémités du conducteur, pour $\theta = -\alpha_{k/2}$ et $\theta = \alpha_{k/2}$.

Il vient

$$\begin{vmatrix} \bar{\Phi}'_{1k} \\ \bar{\Phi}'_{2k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ch } \alpha_{k/2} & -\text{sh } \alpha_{k/2} \\ \text{ch } \alpha_{k/2} & \text{ch } \alpha_{k/2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$$

Soit l_k la distance de l'origine au fond de l'encoche. Posons

$$I_{1k} = b \int_{-a_{k/2}}^{l_k} i \, dx \quad \text{et} \quad I_{2k} = -b \int_{a_{k/2}}^{l_k} i \, dx \quad (\text{I. IV. 4})$$

D'après (I. II. 1) et le théorème d'Ampère appliqué sur les lignes à $\bar{\Phi} = \text{constante}$ aux limites du conducteur, nous avons

$$B \left(-\frac{a}{2} \right) = \left(\frac{d\bar{\Phi}'}{dx} \right)_{-\frac{a}{2}} = \frac{d\bar{\Phi}'}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \sqrt{j} K \left(\frac{d\bar{\Phi}'}{d\theta} \right)_{-\frac{\alpha}{2}} = \mu I_{1k}$$

$$B \left(\frac{a}{2} \right) = \left(\frac{d\bar{\Phi}'}{dx} \right)_{\frac{a}{2}} = \sqrt{j} K \left(\frac{d\bar{\Phi}'}{d\theta} \right)_{\frac{\alpha}{2}} = -\mu I_{2k}$$

soit

$$\begin{vmatrix} I_{1k} \\ I_{2k} \end{vmatrix} = \frac{K}{\mu} \begin{vmatrix} -\text{sh } \alpha/2 & \text{ch } \alpha/2 \\ -\text{sh } \alpha/2 & -\text{ch } \alpha/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix} = -\frac{\mu}{K \text{sh } \alpha} \begin{vmatrix} \text{ch } \alpha + \text{ch } \alpha/2 \\ -\text{sh } \alpha/2 + \text{sh } \alpha/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix}$$

d'où

$$\begin{vmatrix} \bar{\Phi}'_{1k} \\ \bar{\Phi}'_{2k} \end{vmatrix} = + \frac{\mu}{K \text{sh } \alpha} \begin{vmatrix} \text{ch } \alpha + 1 \\ 1 + \text{ch } \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_{1k} \\ I_{2k} \end{vmatrix}$$

Si on prend $\rho/ab = R_k$, il vient

$$\left. \begin{aligned} j \omega \bar{\Phi}'_1 &= \frac{R_k \alpha}{\text{th } \alpha} I_{1k} + \frac{R_k \alpha}{\text{sh } \alpha} I_{2k} \\ j \omega \bar{\Phi}'_2 &= \frac{R_k \alpha}{\text{sh } \alpha} I_{1k} + \frac{R_k \alpha}{\text{th } \alpha} I_{2k} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. IV. 5})$$

Les équations (I. IV. 5) sont aussi celles du quadripôle de la figure I. IV. 6 , ou de celui de la figure I. IV. 7 avec les notations de G. KOUSKOFF, soit

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_k \alpha}{\text{sh } \alpha} &= (r_k - s_k) + j(x_k - y_k) \\ \frac{R_k \alpha (\text{ch } \alpha - 1)}{\text{sh } \alpha} &= s_k + j y_k \end{aligned} \right\} \quad \text{---} \quad \text{(I. IV. 6)}$$

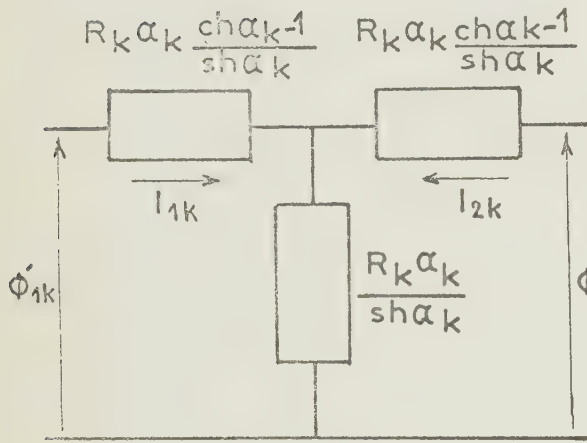


Fig. I. IV. 6

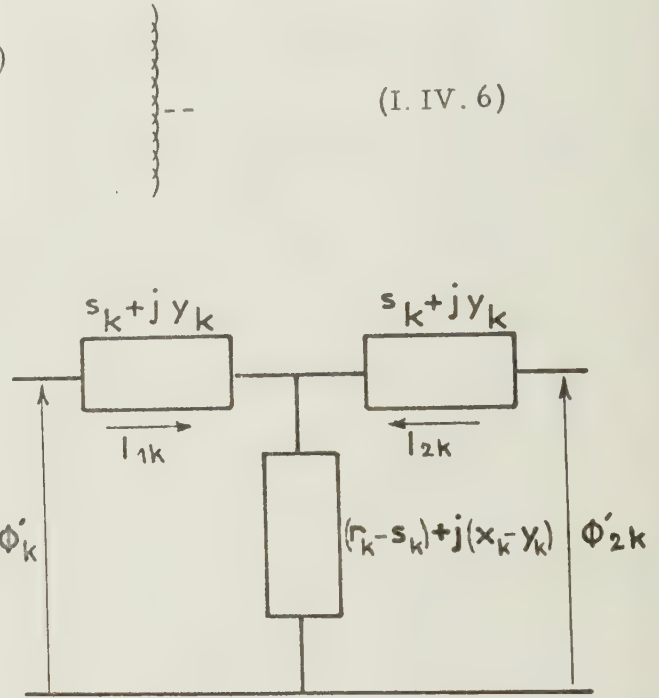


Fig. I. IV. 7

Pour déterminer l'influence de la couche diélectrique qui sépare les conducteurs, prenons l'origine des x au milieu de l'élément diélectrique situé entre les conducteurs d'ordre k et (k-1) (Fig. I. IV. 8).

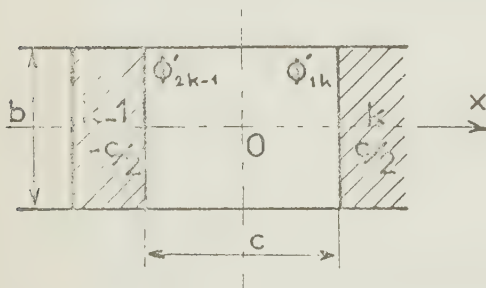


Fig. I. IV. 8

Puisque le courant est nul dans ce domaine, l'équation (I. IV. 2) se réduit à

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}'}{d\theta^2} = 0$$

qui donne

$$\bar{\Phi}' = C \theta + D$$

Si $\bar{\Phi}'_{1k}$ et $\bar{\Phi}'_{2k-1}$ sont les valeurs de $\bar{\Phi}'$ aux extrémités de ce domaine, on a

$$C = \frac{\bar{\Phi}'_{1k} - \bar{\Phi}'_{2k-1}}{\gamma} \quad \text{avec} \quad \gamma = c \sqrt{j} K$$

tandis que le théorème d'Ampère donne

$$(B)_{x=c/2} \left(\frac{d\bar{\Phi}'}{dx} \right)_{x=c/2} = \left(\frac{d\bar{\Phi}'}{d\theta} \right)_{c/2} \sqrt{j} K = \frac{\mu}{b} I_{1k}$$

d'où

$$\frac{\mu I_{1k}}{b} = \frac{\bar{\Phi}'_{1k} - \bar{\Phi}'_{2k-1}}{c}$$

La couche diélectrique qui sépare les conducteurs est donc représentée par un quadripôle réduit à une impédance série

$$j \omega \mu \frac{c}{b} = j x' \quad (\text{I. IV. 7})$$

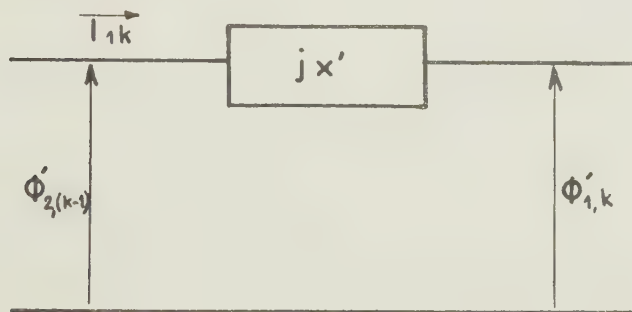


Fig. I. IV. 9

I. IV. 1, 5. - Représentation de l'encoche complète par son schéma équivalent. Construction de la matrice impédance correspondante.

La fonction $\bar{\Phi}$ et ses dérivées sont continues dans toute l'encoche, tandis que $\bar{\Phi}'$ ne l'est pas. C'est donc $\bar{\Phi}$ qu'il faut utiliser pour établir le schéma équivalent à l'encoche. Nous pourrions alors connecter bout à bout les quadripôles représentant les différentes parties de l'encoche.

Les résultats précédents donnent immédiatement pour l'encoche de la figure I. IV. 4 la représentation de la figure I. IV. 10.

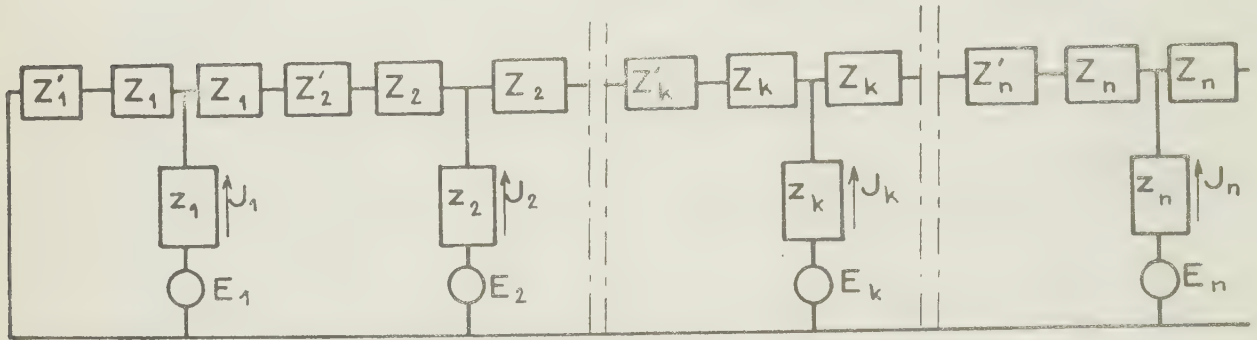


Fig. I. IV. 10

Sur le schéma de la figure I. IV. 11, nous avons ainsi

$$\bar{Z}_k = s_k + j y_k = R_k \alpha_k (\text{ch } \alpha_k - 1) / \text{sh } \alpha_k$$

$$\bar{Z}'_k = (r_k - s_k) + j (x_k - y_k) = R_k \alpha_k / \text{sh } \alpha_k$$

$$\bar{Z}'_k = j x'_k = j \omega \mu \frac{c_k}{b}$$

$$\bar{E}_k = \bar{e}_k - j \omega \bar{\varphi}_0$$

Appelons J_k le courant qui circule dans les impédances z_k .

Nous aurons

$$J_k = I_1 + I_2 = b \int_{-a/2}^{+a/2} i dx - b \int_{a/2}^{l_k} i dx = b \int_{-a/2}^{+a/2} i dx$$

Le courant J_k est donc l'intensité totale qui traverse le k ième conducteur.

Le schéma équivalent de la figure I. IV. 11 nous permet de définir immédiatement la matrice $|Z|$ telle que $|\bar{E}| = |Z| |\bar{I}|$, et dont les éléments sont

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}_{ij} &= \sum_{k=1}^{k=i} (\bar{Z}'_k + 2 \bar{Z}_k) - \bar{Z}_k \quad (j > i) \\ \bar{Z}_{ii} &= \sum_{k=1}^i (\bar{Z}'_k + 2 \bar{Z}_k) - \bar{Z}_k + \bar{z}_k \end{aligned} \right\} \quad \text{---} \quad \text{(I. IV. 8)}$$

On déduit $\overline{Z}_{ij}$ pour $j < i$ par une symétrie par rapport à la diagonale principale.

I. IV. 2. - Cas des distributions cylindriques de révolution.

I. IV. 2, 1. - Introduction.

La matrice $|Z|$ d'un tel système se détermine par une méthode analogue à la précédente. En effet, la distribution de φ étant de révolution, les lignes équiflux sont des cercles concentriques, ce qui nous conduit à un schéma du même type que celui de la Fig. I. IV. 10. Mais, le calcul est compliqué par la résolution de l'équation (I. I. 3) qui fait intervenir les fonctions de Bessel. Nous nous bornerons donc au cas de l'impédance propre d'un conducteur unique de section circulaire.

Signalons toutefois que G. KOUSKOFF a traité en détail le problème des conducteurs coaxiaux [5] .

I. IV. 2, 2. - Méthode d'étude.

Considérons un conducteur cylindrique de révolution, d'axe Oz et de rayon a, parcouru par un courant $I(t)$ et soumis au champ $e(t)$.

Soit φ_0 la valeur de φ sur le cercle équiflux (L_0) de rayon a, à la surface du conducteur. Il divise le plan xOy en deux domaines intérieur et extérieur. Soient φ_1 et φ_2 la répartition de φ dans ces domaines.

Dans ces conditions, on peut calculer l'impédance du conducteur en considérant la fonction Φ , solution de

$$\Delta \Phi - j \omega \frac{\mu}{\rho} \Phi + \frac{\mu}{\rho} \overline{E} = 0 \quad (I. IV. 9)$$

avec $\overline{\Phi} = \overline{\varphi}_1 - \varphi_0$ et $\overline{E} = \bar{e} - j \omega \overline{\varphi}_0$

$\overline{\Phi}$ étant nulle sur la ligne équiflux (L_0).

I. IV. 2, 3. - Etude d'un conducteur unique de section circulaire.

L'équation (I. IV. 9) s'exprime dans un domaine circulaire par

$$\frac{1}{r} \frac{d\bar{\Phi}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\Phi}}{dr} - j\omega \frac{\mu}{r} \bar{\Phi} + \frac{\mu}{r} \bar{E} = 0 \quad (\text{I. IV. 10})$$



Fig. I. IV. 11

avec

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_0 \quad \text{et} \quad \bar{E} = \bar{e} - j\omega \bar{\Phi}_0$$

Posons

$$\bar{\Phi}' = \bar{\Phi} - \frac{\bar{E}}{j\omega} \quad \text{et} \quad p = r \sqrt{\frac{-j\omega\mu}{r}} = r \sqrt{-j} K$$

il vient

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}'}{dp^2} + \frac{1}{p} \frac{d\bar{\Phi}'}{dp} + \bar{\Phi}' = 0$$

qui est une équation de Bessel dont la solution est

$$\bar{\Phi}' = A J_0(p)$$

où $J_0(p)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0.

On peut écrire $J_0(p)$ sous la forme [6]

$$J_0(p) = M_0(Kr) e^{j\theta_0(Kr)}$$

Mais, pour $r = a$, $\bar{\Phi} = 0$ et $\bar{\Phi}' = -\frac{\bar{E}}{j\omega} = \bar{\Phi}_0 - \frac{\bar{e}}{j\omega} = A J_0(p_a)$

avec

$$p_a = a \sqrt{-j} K, \quad \text{d'où} \quad \bar{\Phi}' = \left(\bar{\Phi}_0 - \frac{\bar{e}}{j\omega} \right) \frac{J_0(p)}{J_0(p_a)} \quad (\text{I. IV. 11})$$

L'impédance propre du conducteur est $\bar{Z} = \bar{E}/\bar{I}$, $\bar{I}$ étant le courant total qui le traverse :

$$\bar{I} = 2\pi \int_0^a i r dr$$

Mais on a $\rho \bar{I} + j \omega \bar{\Phi}' = 0$, d'où

$$\bar{I} = -2\pi \int_0^a \frac{j \omega \bar{\Phi}'}{r} r dr = \frac{2\pi a (\bar{e} - j \omega \bar{\Phi}'_0)}{\rho J_0(p_a) \sqrt{-j} K} J_1(p_a) \quad (\text{I. IV. 12})$$

$J_1(p_a)$ étant la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1,

d'où

$$\bar{Z} = \bar{E}/\bar{I} = \frac{\bar{e} - j \omega \bar{\Phi}'_0}{I} = \rho \frac{\sqrt{-j} K}{2\pi a} \frac{J_0(p_a)}{J_1(p_a)}$$

soit en posant

$$R_o = \rho / \pi a^2$$

$$\frac{\bar{Z}}{R_o} = \frac{Ka}{2} \sqrt{-j} \frac{M_o(Ka)}{M_1(Ka)} e^{j [\theta_o(Ka) - \theta_1(Ka)]}$$

ou

$$\frac{\bar{Z}}{R_o} = \frac{Ka}{2} \frac{M_o(Ka)}{M_1(Ka)} e^{j [\theta_o(Ka) - \theta_1(Ka) + \frac{3\pi}{4}]} \quad (\text{I. IV. 13})$$

Si le rayon de la ligne équiflux (L_o) est supérieur à a , on peut remplacer le conducteur massif par un tube conducteur infiniment mince et sans résistance, parcouru par le courant $I(t)$. Dans l'espace compris entre ce conducteur et (L_o), la répartition du flux reste inchangée. Nous avons

$$\Delta(\varphi_2 - \varphi_o) = \Delta\Phi = 0$$

ou

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\Phi}}{dr} = 0$$

dont la solution est

$$\bar{\Phi} = A \text{Log } r$$

Le théorème d'Ampère donne

$$\bar{\Phi} = \frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log } r$$

En exprimant la variation du

flux linéique quand r passe de a

à r_o , nous obtenons l'inductance mutuelle entre les deux conducteurs

$$\bar{\Phi}(r_o) - \bar{\Phi}(a) = \frac{\mu_o I}{2\pi} \text{Log } \frac{r_o}{a}$$

$$M = \frac{\mu_o}{2\pi} \text{Log } \frac{r_o}{a} \quad (\text{I. IV. 14})$$

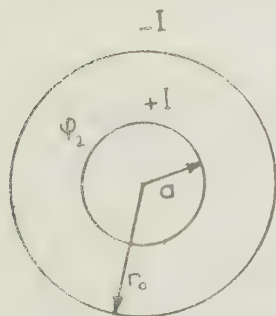


Fig. I. IV. 12

METHODES NUMERIQUES ET ANALOGIE A CONSTANTES LOCALISEES

II. I. - INTRODUCTION.

Nous venons de voir dans le chapitre précédent, que l'intégration de l'équation (I. I. 3) dans des domaines de formes simples conduisait à des calculs compliqués. Il va de soi que, pour étudier des problèmes plus difficiles, il faut utiliser des méthodes différentes, par exemples numériques ou analogiques.

Cependant, il faut noter que celles-ci ne fournissent pas toujours, à la fois la répartition de φ , et les impédances des conducteurs.

Deux méthodes permettant d'intégrer (I. I. 3) dans des domaines de forme quelconque, sont proposées dans ce chapitre. La première donne exclusivement la répartition de φ , la seconde donne en plus les impédances des conducteurs.

II. II. - DETERMINATION DE LA REPARTITION DU FLUX DANS UNE ENCOCHE RECTANGULAIRE, PAR UNE METHODE NUMERIQUE

II. II. I. - Exposé du problème.

Il s'agit de résoudre numériquement l'équation parabolique (I. IV. I) dans le domaine défini par la figure (II. II. I). Le problème se prête très bien à l'emploi de la méthode des différences finies. Les deux variables seront, la cote x des lignes équiflux, et le temps t .

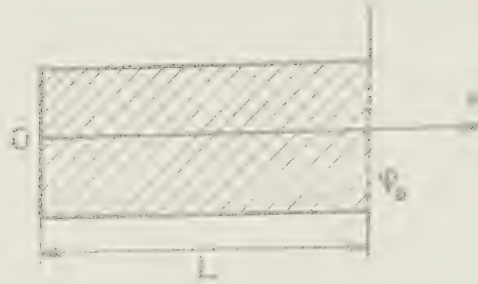


Fig. II. II. 1

Intégrons donc l'équation entre les limites suivantes

$$0 < x < L$$

$$0 < t < T$$

La valeur de T dépend du problème à étudier. Dans le cas considéré des phénomènes sinusoidaux, T sera la demi-période.

II. II. 2. - Conditions aux limites.

Avec les hypothèses faites, la limite de l'encoche et de l'entrefer est une ligne équiflux où $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0$

D'autre part, au fond de l'encoche, nous savons que

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

Les conditions aux limites sont ainsi des conditions de Dirichlet et de Neumann, (c'est-à-dire des conditions mixtes), pour lesquelles la théorie générale prévoit que, pour un domaine ouvert avec une équation parabolique, la solution est stable et unique.

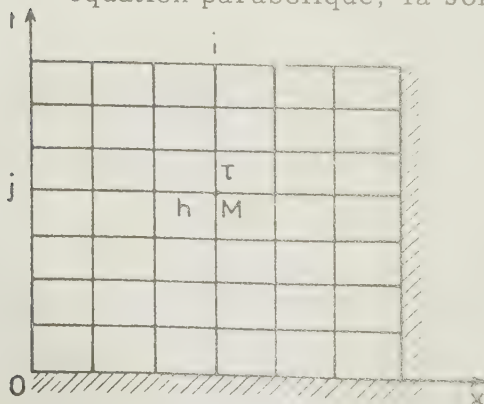


Fig. II. II. 2

On définit le domaine d'intégration en portant en abscisse la variable x et en ordonnée la variable t . Le problème consiste à déterminer les différentes valeurs que prend la fonction φ à l'intérieur d'un rectangle de côté L et T , connaissant les valeurs

de φ sur les côtés hachurés et sachant que sur l'axe des temps, on a $d\varphi/dx = 0$. On découpe le rectangle ainsi obtenu (Fig. II. II. 2) en rectangles élémentaires de côtés h et τ . Les valeurs de h et τ sont petites par définition, et sont des diviseurs de L et de T .

II. II. 3. - Méthode des différences finies.

Soit $\varphi(x, t)$ la valeur de la fonction au nœud M de coordonnées x et t .

Pour $x + h$, φ devient :

$$\varphi(x + h, t) = \varphi(x, t) + h \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) + \dots$$

Pour $x - h$, de même

$$\varphi(x - h, t) = \varphi(x, t) - h \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) - \dots$$

On en déduit

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\varphi(x + h, t) - 2\varphi(x, t) + \varphi(x - h, t)}{h^2} \quad (\text{II. II. 1})$$

au 4ème ordre près en h .

De la même manière pour $t - \tau$, φ est

$$\varphi(x, t - \tau) = \varphi(x, t) - \tau \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, t) - \dots$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = \frac{\varphi(x, t) - \varphi(x, t - \tau)}{\tau} \quad (\text{II. II. 2})$$

au 2ème ordre près en τ .

Désignons par l'indice j les nœuds situés sur une même ligne (c'est-à-dire à $t = \text{constante}$) et par l'indice i les nœuds situés sur une même colonne ($x = \text{constante}$). L'équation (I. IV. I) pour le point i, j devient

$$\frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2} - \frac{\mu}{\rho} (\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}) + \frac{\mu}{\rho} e_j = 0 \quad (\text{II. II. 3})$$

ou encore

$$(2 \frac{\rho\tau}{\mu h^2} + 1) \varphi_{i,j} - \frac{\rho\tau}{\mu h^2} \varphi_{i-1,j} - \frac{\rho\tau}{\mu h^2} \varphi_{i+1,j} = \tau e_j + \varphi_{i,j-1} \quad (\text{II. II. 4})$$

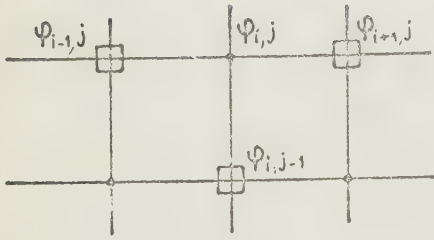


Fig. II. II. 3

La figure II. II. 3 montre donc que pour calculer $\varphi_{i,j}$, il faut connaître φ en 3 points voisins.

II. II. 4. - Résolution du système.

Pour chaque point, nous avons une équation du type (II. II. 4). Avec $n = L/h$, nous obtenons un système de $n + 1$ équations pour chaque ligne, ($n + 1$ étant le nombre de nœuds situés sur une même ligne).

Posons les coefficients a_1, a_2, a_3 .

$$a_1 = \frac{\rho\tau}{\mu h^2} + 1 \quad ; \quad a_2 = \frac{2\rho\tau}{\mu h^2} + 1 \quad ; \quad a_3 = -\frac{\rho\tau}{\mu h^2}$$

La première équation du système est donnée par la condition

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$$

$$\varphi_{0,j} - \varphi_{1,j} = 0$$

Les autres s'écrivent

$$a_3 \varphi_{0,j} + a_2 \varphi_{1,j} + a_3 \varphi_{2,j} = \tau e_j + \varphi_{1,j-1}$$

$$a_3 \varphi_{1,j} + a_2 \varphi_{2,j} + a_3 \varphi_{3,j} = \tau e_j + \varphi_{2,j-1} \quad , \text{ etc...}$$

Puisque $\varphi_{n,j}$ est imposé par les conditions aux limites, la dernière équation du système s'écrit :

$$a_3 \varphi_{n-2,j} + a_2 \varphi_{n-1,j} = \tau e_j + \varphi_{n-1,j} - a_3 \varphi_{n,j}$$

Le système se réduit à un système d'ordre n , puisque nous pouvons remplacer $\varphi_{0,j}$ par $\varphi_{1,j}$.

Ecrivons le système sous forme d'équation matricielle. Soit Φ_j le vecteur solution, A la matrice des coefficients et B_j la matrice colonne formée par les seconds membres ; nous avons

$$A \Phi_j = B_j$$

avec

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

et

$$B_j = \begin{vmatrix} \tau_{e_j} + \varphi_{1,j-1} \\ \tau_{e_j} + \varphi_{2,j-1} \\ \tau_{e_j} + \varphi_{3,j-1} \\ \dots \\ \tau_{e_j} + \varphi_{n-1,j-1} + \varphi_{n,j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ b_{3,j} \\ \dots \\ b_{n-1,j} \end{vmatrix}$$

Pour résoudre l'équation $A \Phi_j = B_j$, triangularisons d'abord la matrice A .

Pour cela, il suffit de réaliser une succession de combinaisons linéaires qui annulent les termes de la sous-diagonale inférieure.

Multiplions tous les termes de la première ligne par un coefficient λ_2 et retranchons les des termes correspondants de la deuxième ligne ; la matrice A devient

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 - \lambda_2 a_1 & a_2 - \lambda_2 a_3 & a_3 & 0 & \dots \\ 0 & a_3 & a_2 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Pour annuler le premier terme de la sous-diagonale inférieure, il faut prendre $\lambda_2 = a_3/a_1$. Remplaçons λ_2 par sa valeur et multiplions la deuxième ligne ainsi obtenue par un facteur λ_3 et retranchons-la terme à terme avec la troisième ligne; nous obtenons

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 & \dots\dots\dots \\ 0 & a_2 - a_3^2/a_1 & a_3 & 0 & \dots\dots\dots \\ 0 & a_3 - \lambda_3 a_2 & a_2 - \lambda_3 a_3 & a_3 & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda_3 = a_2 - a_3^2/a_1$$

Prenons $\lambda_3 = \frac{a_3}{a_2 - a_3^2/a_1}$, le deuxième terme de la sous-

diagonale inférieure s'annule. En opérant ainsi de proche en proche, on finit par triangulariser la matrice A.

Désignons maintenant par α_i les nouveaux termes de la diagonale principale, et par $\beta_{i,j}$ les nouvelles valeurs des termes de la matrice B_j . Nous avons

$$\lambda_i = \frac{a_3}{\alpha_{i-1}}$$

$$\alpha_i = a_2 - \frac{a_3^2}{\alpha_{i-1}} \quad \beta_{i,j} = b_{i,j} - \frac{a_3}{\alpha_{i-1}} \beta_{i-1,j}$$

En fin de compte, nous obtenons

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_2 & a_3 & 0 & \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \alpha_{n-1} & \dots \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \varphi_{1,j} \\ \varphi_{2,j} \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_{n-1,j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_{1,j} \\ \beta_{2,j} \\ \dots\dots\dots \\ \beta_{n-1,j} \end{vmatrix}$$

Il en résulte alors pour φ

$$\alpha_{n-1} \varphi_{n-1,j} = \beta_{n-1,j}$$

La quantité $\varphi_{n-1,j}$ étant connue, on en déduit en particulier

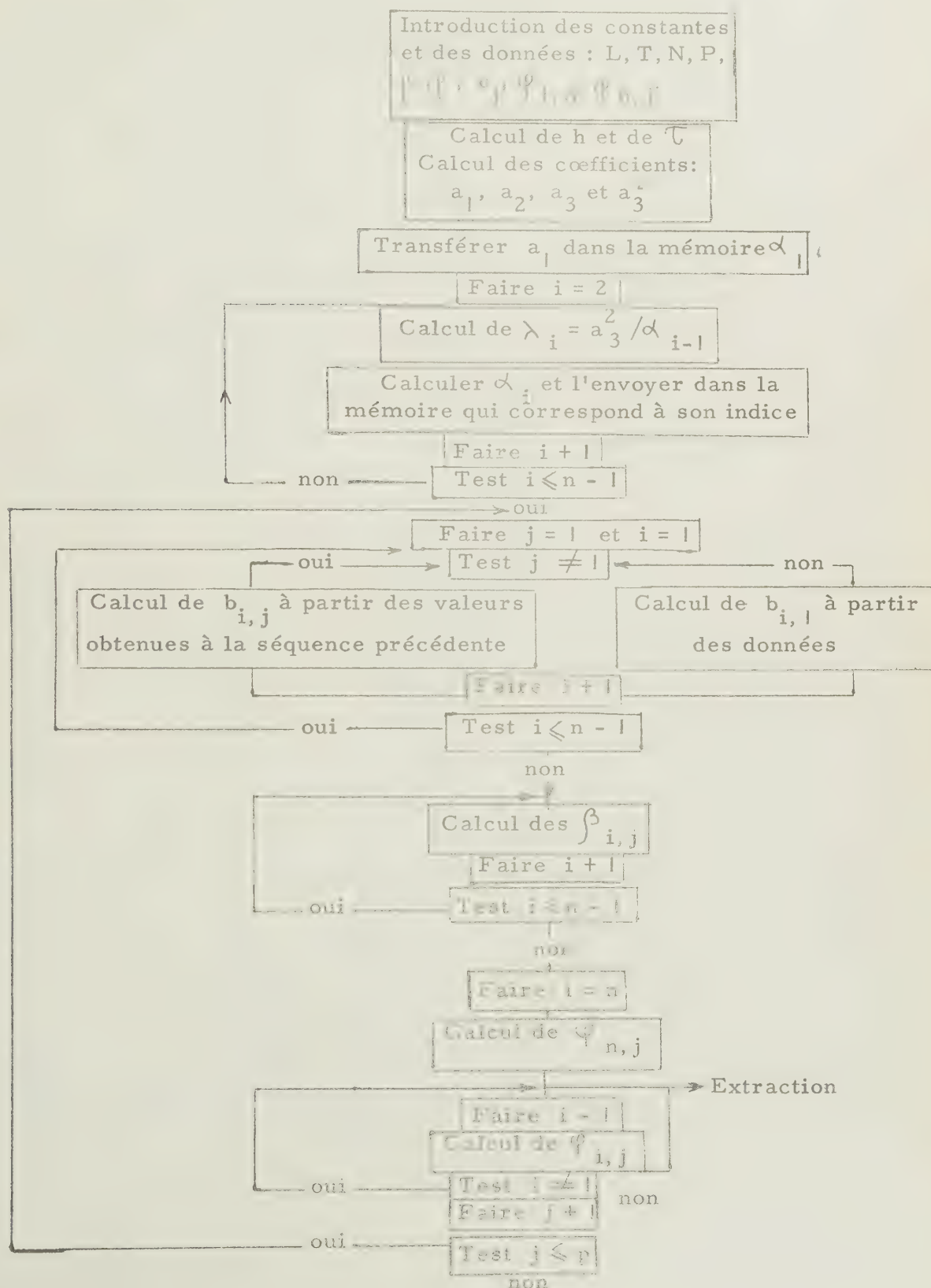
$$\alpha_{n-2} \varphi_{n-2,j} + a_3 \varphi_{n-1,j} = \beta_{n-2,j}$$

et de manière générale

$$\varphi_{i,j} = \frac{\beta_{i,j} + a_3 \varphi_{i+1,j}}{\alpha_i}$$

Ce système de récurrence est résolu par un ordinateur, à condition d'établir le programme de travail.

Nous avons eu l'usage d'un ordinateur GAMMA A. E. T. de la
Compagnie des Machines BULL. La programmation des calculs précé-
dents donne



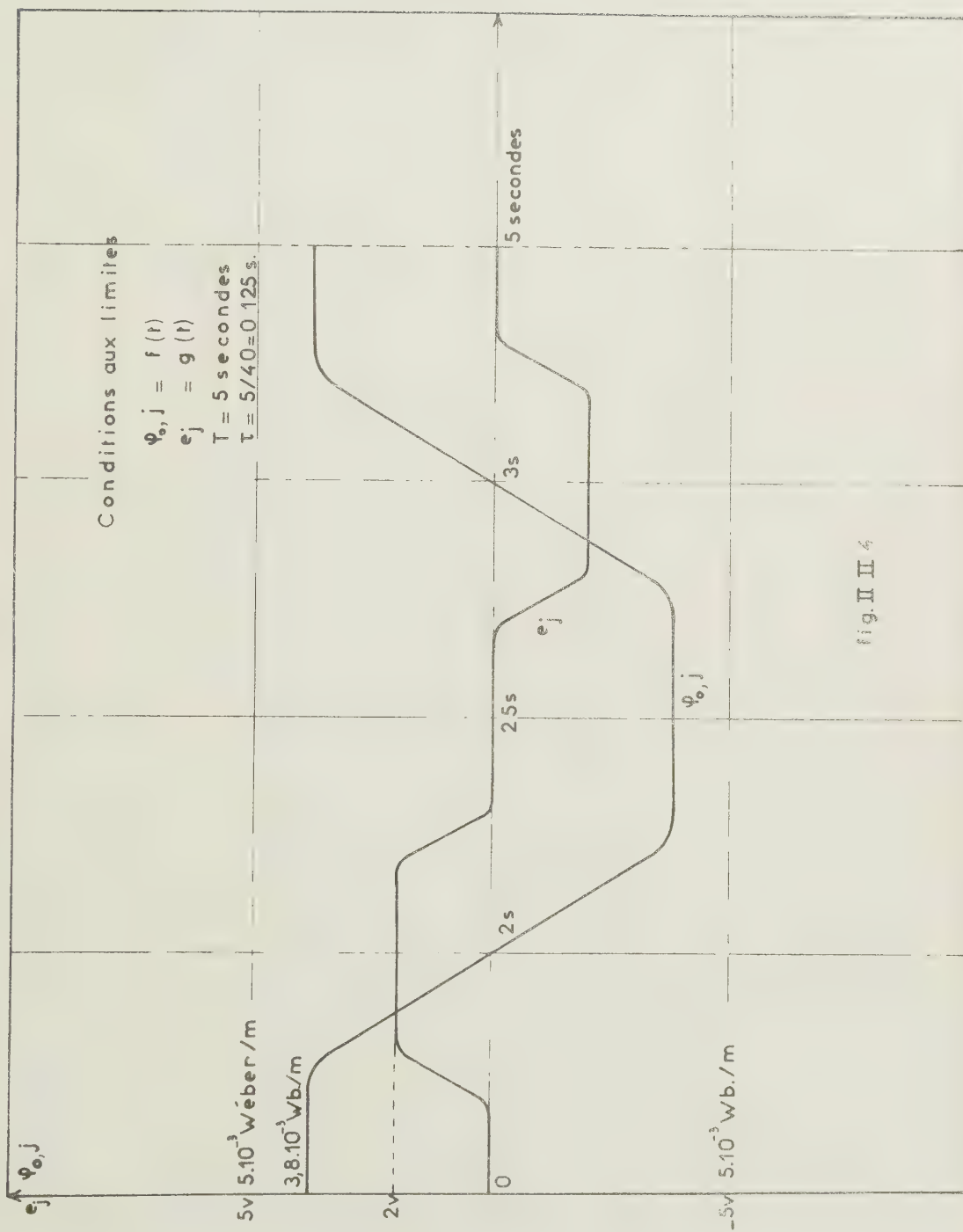
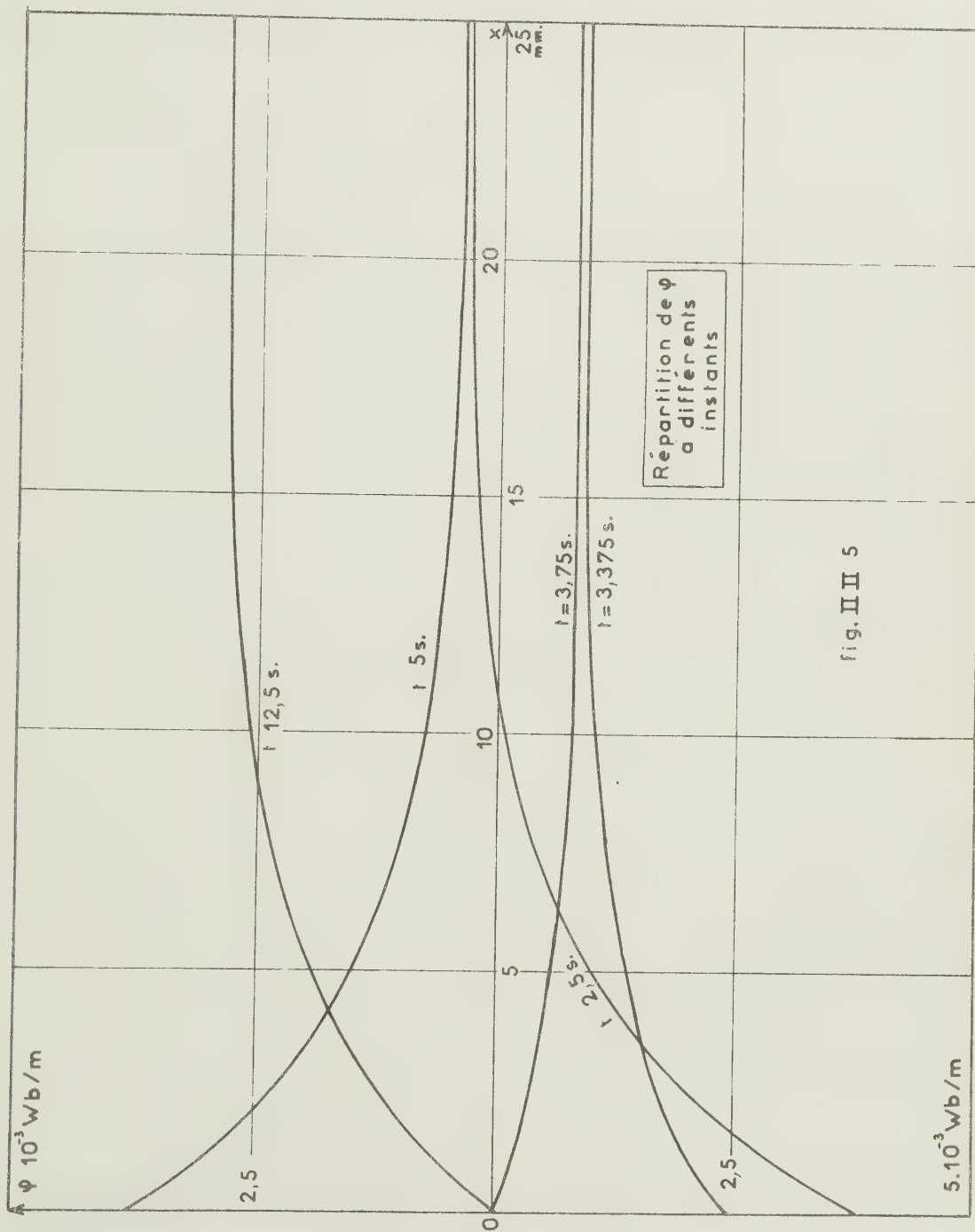


fig. II II 4



Ce programme est ensuite traduit en "langage machine", par exemple à l'aide du code de programmation AP2, puis on réalise les cartes perforées qui donneront à la machine les ordres à exécuter.

II. II. 5. - Résultats obtenus.

Nous avons effectué plusieurs calculs pour une encoche contenant un seul conducteur la remplissant entièrement, et de longueur 25 mm, avec $n = 40$ et $T = 5$, le flux $\varphi_{n,j}$ étant représenté sur la figure II. II. 4).

Nous avons obtenu 40 séries de valeurs correspondant à 40 courbes de répartition de φ dans l'encoche prise à des instants se succédant à 0,125 secondes, dont quelques unes sont représentées, sur la figure II. II. 5.

II. III. - ANALOGIE A CONSTANTES LOCALISEES.

II. III. 1. - Introduction.

La méthode numérique précédente est satisfaisante à bien des points de vue, mais elle ne permet pas dans le cas général de calculer la résistance et l'inductance linéiques d'un conducteur. D'autre part, si la forme du domaine est quelconque, la détermination de la répartition de φ devient très longue et difficile. Même si on parvient à établir le programme logique des calculs, son exploitation par un ordinateur devient beaucoup trop honéreuse.

Il est donc intéressant de faire appel à une méthode analogique pour résoudre des problèmes de ce genre. La forme de l'équation (I. I. 3) nous suggère l'emploi de l'analogie, basée sur l'identité de φ et de la tension relevée aux nœuds d'un réseau de résistances et de capacités. Cette méthode est classique [7] [8]

II. III. 2. - Mise en équation du problème pour une encoche rectangulaire.

Nous appellerons une fois pour toutes, "grandeur objet" les grandeurs qui se rapportent au domaine que l'on veut étudier, et "grandeur image" celles qui leur correspondent dans le circuit analogique.

Reprenons l'équation générale (I. I. 3)

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial y^2} - j\omega \frac{\mu}{\rho} \bar{\Phi} + \frac{\mu}{\rho} \bar{E}(t) = 0 \quad (\text{II. III. 1})$$

et rappelons que la ligne qui sépare l'encoche de l'entrefer est une ligne équipotentielle où $\varphi = \varphi_0$.

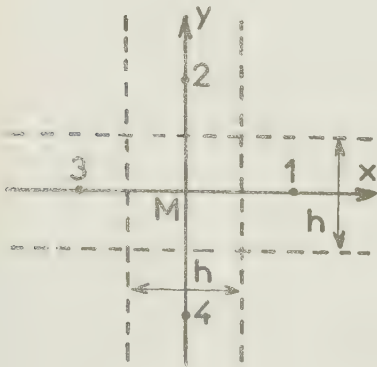


Fig. II. III. 1.

Divisons la section droite de l'encoche en carrés élémentaires de côtés h (Fig. II. III. 1), h étant suffisamment petit pour que le courant qui traverse un carré élémentaire soit négligeable par rapport à l'intensité totale dans le conducteur.

Prenons l'origine des axes au milieu M d'un carré, l'équation (II. II. 1) donne

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_M}{h^2}$$

en négligeant les termes en h^4 , de même que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\varphi_2 + \varphi_4 - 2\varphi_M}{h^2}$$

L'équation (II. III. 1) devient alors

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_M = -\frac{\mu}{\rho} h^2 (\bar{e} - j\omega \bar{\varphi}_0) \quad (\text{II. III. 2})$$

II. III. 3. - Circuit équivalent.

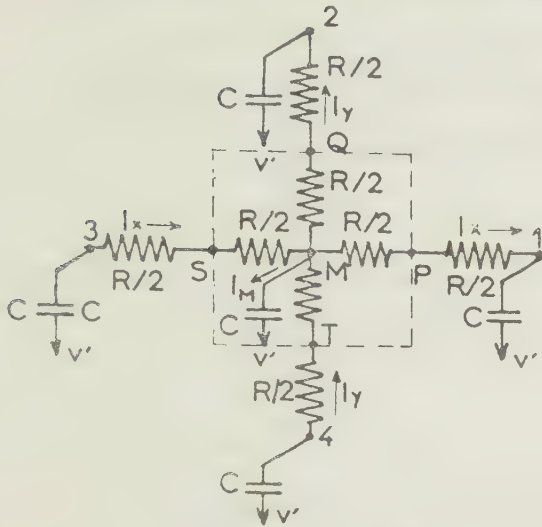


Fig. II. III. 2

Le réseau équivalent, déduit du maillage de la figure II. III. 1 en joignant les points 1, 2, 3 et 4 par des résistances R , est représenté par la figure II. III. 2. En chaque nœud, on applique une tension auxiliaire V' par l'intermédiaire d'une capacité.

Avec les sens positifs choisis sur la figure II. III. 2, on a

$$V_M - V_1 = R I_x (P)$$

$$V_M - V_2 = R I_y (Q)$$

$$V_3 - V_M = R I_x (S)$$

$$V_4 - V_M = R I_y (T)$$

$$I_M = j \omega C (V_M - V')$$

avec, au nœud M

$$I_M = - I_x (P) - I_y (Q) + I_x (S) + I_y (T)$$

Il en résulte

$$j \omega R C (V_M - V') = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4 V_M \quad (\text{II. III. 3})$$

La comparaison des équations (II. III. 2) et (II. III. 3) montre la correspondance entre la tension V aux différents nœuds du réseau et la fonction φ aux nœuds du quadrillage de la figure II. III. 1. Pour que l'analogie soit complète, il faut en plus que la tension $e(t)$ soit la dérivée de la tension V' , et que l'on ait

$$R C = \frac{\mu h^2}{\rho}$$

D'après ce qui précède, le courant total dans le conducteur est représenté par la somme des courants qui traversent les différentes capacités. Celles-ci déterminent donc la partie résistive de l'impédance objet. La capacité C sera de la forme

$$C = h^2 / \rho K$$

K étant un coefficient numérique dont le choix arbitraire sera fixé par les impératifs de la réalisation expérimentale.

On a en outre

$$R = K \mu$$

Les résistances du circuit image correspondent ainsi à la partie inductive de l'impédance objet.

II. III. 4. - Représentation de l'encoche réelle.

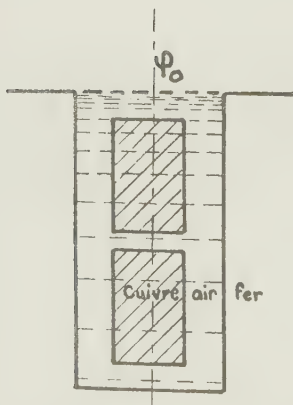


Fig. II. III. 3

Les conducteurs de l'encoche de la figure II. III. 3 seront représentés par un réseau formé de résistances et de capacités tel que

$$R = K \mu \quad C = h^2 / \rho K$$

tandis que le diélectrique de perméabilité μ_0 et de résistivité infinie sera simulé par un réseau de résistances $R' = K \mu_0$ sans capacité puisque ρ infini impose C infinie.

Comme la perméabilité μ du cuivre est égale à celle de l'isolant, $R = R'$.

Puisque la fonction φ et ses dérivées sont continues dans l'encoche, les réseaux que représentent l'isolant et le cuivre sont directement connectés entre eux (Fig. II. III. 4)

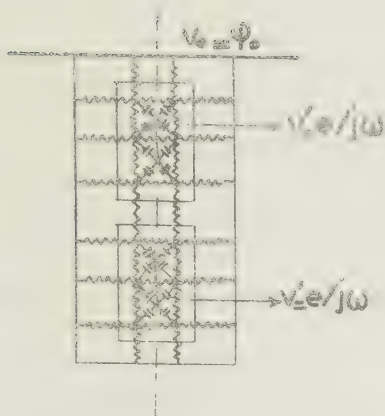


Fig. II. III. 4

Pour chacun des conducteurs, les condensateurs C sont portés au potentiel

$$V' = \bar{e} / j \omega$$

et l'extrémité supérieure du réseau à $\bar{v}_0 = \bar{\varphi}_0$

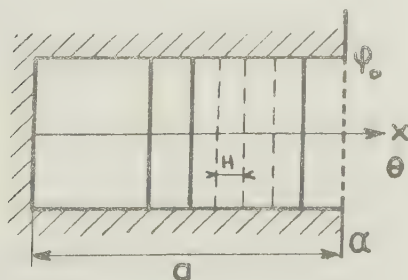
La mesure du potentiel aux différents nœuds fournit la répartition de φ dans l'encoche.

II. III. 5. - Détermination de l'impédance linéique d'un conducteur de même largeur que l'encoche.

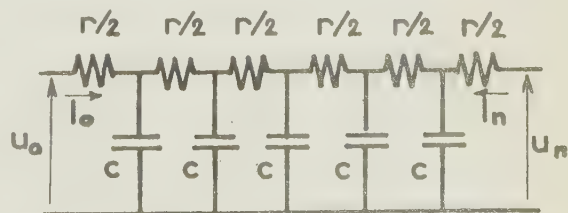
Considérons un conducteur de l'encoche, et divisons-le en bandes de largeur égale à H . (Fig. II. III. 5. a)

Puisque le fer est infiniment perméable, et le conducteur de même largeur que l'encoche, φ ne dépend que de x , et comme précédemment, on a $\varphi = \varphi_0$ sur la ligne équiflux qui sépare l'entrefer de l'encoche.

Divisons le conducteur à étudier en bandes de largeur H . (Fig. II. III. 5. a) qui seront représentées par une chaîne de quadripôles symétriques (Fig. II. III. 5. b).



a) encoche



b) circuit équivalent

Fig. II. III. 5. a

Fig. II. III. 5. b

Si $\bar{A}$, $\bar{B}$, et $\bar{C}$ désignent les coefficients du quadripôle symétrique nous avons, avec $\bar{A}^2 - \bar{B}\bar{C} = 1$

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \bar{A} \bar{U}_2 + \bar{B} \bar{I}_2 & \text{ou bien} & \quad \bar{U}_2 = \bar{A} \bar{U}_1 - \bar{B} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_1 &= \bar{C} \bar{U}_2 + \bar{A} \bar{I}_2 & & \quad \bar{I}_2 = -\bar{C} \bar{U}_1 + \bar{A} \bar{I}_1 \end{aligned} \quad (\text{II. III. 4})$$

où

$$\bar{A} = 1 + j \frac{r c \omega}{2} \quad \bar{B} = r \left(r + j \frac{r c \omega}{4} \right) \quad \bar{C} = j c \omega \quad (\text{II. III. 5})$$

La chaîne précédente est équivalente à un seul quadripôle, [9]

tel que

$$\begin{aligned} \bar{U}_n &= \text{ch } n \bar{g} \bar{U}_o - \bar{z} \bar{I}_o \text{ sh } n \bar{g} & \bar{U}_o &= \text{ch } n \bar{g} \bar{U}_n + \bar{z} \text{ sh } n \bar{g} \bar{I}_n \\ \bar{I}_n &= -\frac{1}{\bar{z} \text{ sh } n \bar{g}} \bar{U}_n + \text{ch } n \bar{g} \bar{I}_o & \bar{I}_o &= \frac{1}{\bar{z} \text{ sh } n \bar{g}} \bar{U}_n + \text{ch } n \bar{g} \bar{I}_n \end{aligned}$$

où $\text{ch } \bar{g} = \bar{A} = 1 + j \frac{r c \omega}{2}$, $\bar{z} = \sqrt{\bar{B}/\bar{C}}$ étant l'impédance caractéristique du quadripôle élémentaire.

Dans la représentation en T par exemple, (Fig. II. III. 6), ce quadripôle est défini par

$$\bar{Z} = \frac{(\text{ch } n \bar{g} - 1) \bar{z}}{\text{sh } n \bar{g}} \quad \text{et} \quad \bar{Y} = \frac{\bar{z}}{\text{sh } n \bar{g}} \quad (\text{II. III. 6})$$

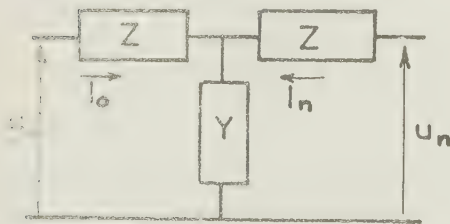


Fig. II. III. 6

Si l'encoche ne contient qu'un seul conducteur, son impédance objet est

$$Z_o = \frac{\bar{E}}{\bar{I}} = \frac{\bar{e} - j \omega \bar{\varphi}_o}{\bar{I}} = \frac{R_k \alpha_k}{\text{th } \alpha_k}$$

et son impédance image

$$\bar{Z}_i = (\bar{Z} + \bar{Y}) = \frac{\bar{z}}{\text{th } n \bar{g}}, \quad \text{par conséquent } \bar{Z}_o = j \omega \bar{Z}_i$$

Le facteur j traduit la correspondance entre la partie réelle de $\bar{Z}_i$ et la partie imaginaire de $\bar{Z}_o$, et inversement.

CHAPITRE III

ANALOGIE A CONSTANTES REPARTIES

III. I. - INTRODUCTION.

Dans le réseau précédent, utilisé pour l'analogie à constantes localisées, il n'est pas possible de choisir de manière quelconque le point où l'on désire mesurer la tension v , image du flux linéique φ , puisque les nœuds du réseau qui constituent les points de mesure sont toujours en nombre limité.

Mais, si on divise mentalement le maillage à l'infini, on obtient un système constitué par une nappe résistante superficielle, sur un diélectrique homogène, jouant le rôle des capacités.

Le système à constantes localisées est alors remplacé par un système à constantes réparties, constitué par un condensateur, dont l'une des armatures est uniformément conductrice, et l'autre résistante.

Un tel système a déjà été utilisé par EG. et EO. GILBERT [10], qui se sont bornés à la répartition poissonienne, tandis que K. SCHÖNBACHER [11] le cite sans donner cependant d'application expérimentale.

L'intérêt de cette méthode réside dans la facilité de sa mise en œuvre, surtout lorsque la forme du domaine cylindrique considéré est quelconque, et qu'il est alors difficile de réaliser les limites du réseau correspondant, à résistances-capacités. La description, la justification et la mise en œuvre de ce procédé sont l'objet de ce chapitre.

III. II. - BASES THEORIQUES DE L'ANALOGIE A CONSTANTES REPARTIES.

III. II. I. - Description et équations du système.

Le condensateur précédent qui constitue le système (Fig. III. II. I) est formé par :

- une lame diélectrique (D) d'épaisseur uniforme d , et de permittivité ϵ , parallèle au plan xOy .
- une couche métallique homogène (C_c) infiniment conductrice.
- une couche résistante (C_r), à base de Germanium et d'Aluminium évaporés sous vide, d'épaisseur h très petite devant d , et de résistivité ρ' .

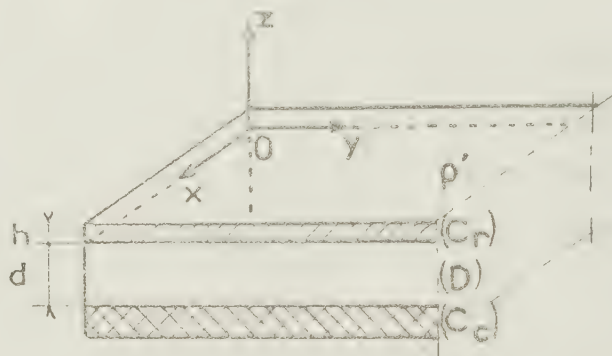


Fig. III. II. I

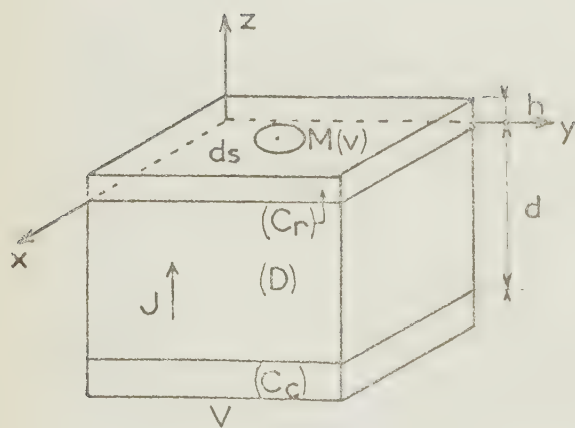


Fig. III. II. 2

Considérons un parallélépipède élémentaire de ce système, de base dS , où au point M de la couche (C_r) le potentiel est v .

Soit V le potentiel de la couche (C_c).

Si, dans le plan xOy , $\text{grad } v$ reste petit vis-à-vis de $\frac{V-v}{h}$,

le courant de déplacement dans le diélectrique est parallèle à Oz , et de module

$$J = -\frac{\epsilon}{d} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{dV}{dt} \right) \quad (\text{III. II. I})$$

soit, en régime sinusoïdal de pulsation Ω

$$\bar{J} = j\Omega \frac{\epsilon}{d} \bar{V} - j\Omega \frac{\epsilon}{d} \bar{v} \quad (\text{III. II. I'})$$

Le courant de conduction de densité $-\frac{\overrightarrow{\text{grad } v}}{\rho'}$ dans la couche (C_r) est perpendiculaire à Oz si la couche est assez mince, $\bar{v} = \bar{v}(x, y)$ ne dépendant plus que de x et de y .

La conservation de la charge dans le volume $h \, dS$ de (C_r) qui s'appuie sur la surface de contact dS avec le diélectrique, impose

$$\begin{aligned} \text{div} \left(-\frac{\overrightarrow{\text{grad } v(x, y)}}{\rho'} \right) h \, dS &= J \, dS \\ \Delta v(x, y) + \frac{\rho'}{h} J &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III. II. 2})$$

Compte tenu de (III. II. 1), cette relation s'écrit

$$\Delta v - \frac{\varepsilon}{d} \frac{\rho'}{h} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{d} \frac{\rho'}{h} \frac{dV}{dt} = 0 \quad (\text{III. II. 3})$$

ou

$$\Delta \bar{v} - j\Omega \frac{\varepsilon}{d} \frac{\rho'}{h} \bar{v} + j\Omega \frac{\varepsilon}{d} \frac{\rho'}{h} \bar{V} = 0 \quad (\text{III. II. 3'})$$

III. II. 2. - Analogie entre le domaine cylindrique et son image.

La comparaison des relations (I. I. 3) et (III. II. 3) montre qu'à la fonction φ du modèle correspond le potentiel v de l'image.

La correspondance est complète avec les mêmes dimensions pour l'objet et son image, à condition d'associer, comme l'imposent alors les couples de relations (I. I. 1)-(III. II. 2) d'une part et (I. I. 2)-(III. II. 1') de l'autre,

$$\mu \bar{i} \text{ à } \frac{\rho'}{h} \bar{J}, \quad \frac{\rho \bar{i}}{\omega} \text{ à } \frac{d \bar{J}}{\Omega \varepsilon}, \text{ ainsi que } \frac{\bar{e}}{j \omega} \text{ à } \bar{V} \quad (\text{III. II. 4})$$

ce qui nécessite

$$\omega \frac{\mu}{\rho} = \Omega \frac{\rho'}{h} \frac{\varepsilon}{d} \quad (\text{III. II. 5})$$

Si l'image et l'objet sont seulement semblables, λ étant le rapport de similitude entre l'objet rapporté à des axes xOy et l'image à XOY , on a

$$x = \lambda X \quad y = \lambda Y$$

Les équations fondamentales sont alors

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} - j \omega \frac{\mu}{\rho} \bar{\varphi} + \frac{\mu}{\rho} \bar{e} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} - j \Omega \frac{\rho' \epsilon}{h d} \bar{v} + j \Omega \frac{\rho' \epsilon}{h d} \bar{V} = 0$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\lambda^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\lambda^2 \partial y^2} - j \Omega \frac{\rho' \epsilon}{h d} \bar{v} + j \Omega \frac{\rho' \epsilon}{h d} \bar{V} = 0$$

La relation (III. II. 5) devient ainsi

$$\frac{\mu \omega}{\rho} = \lambda^2 \frac{\rho' \epsilon}{h d} \Omega \quad (\text{III. II. 6})$$

Nous avons vu au chapitre I que les conditions aux limites se traduisent généralement par la réfraction des lignes équiflux

φ = constante à la surface de séparation de deux milieux de perméabilité différente.

Pour v , à la limite de deux couches résistantes de résistivité superficielle ρ'_1/h et ρ'_2/h , on a de la même façon

$$\vec{E} = - \text{grad } v = \frac{\rho'}{h} \vec{i} = \frac{\partial v}{\partial N} \vec{N} + \frac{\partial v}{\partial T} \vec{T}$$

La continuité de la composante normale du courant impose

$$\frac{h}{\rho'_1} \left(\frac{\partial v}{\partial N} \right)_1 = \frac{h}{\rho'_2} \left(\frac{\partial v}{\partial N} \right)_2$$

analogue à

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_1 = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_2$$

La continuité de φ et de $\text{grad } \varphi$ que traduit la continuité de v et de $\text{grad } v$ est bien respectée si la couche (C_r) est continue.

En ce qui concerne les valeurs numériques, la condition (III. II. 5), avec $\mu/\rho = 100$, $\mathcal{E}$ de l'ordre de 10^{-10} , exige alors que d , donc h , soient très petits, par exemple 0,1 mm et 10^{-3} mm respectivement, sous peine d'avoir Ω/ω , donc $\bar{J}$ et $\text{grad } v$ trop grands. Il faut donc, pour ρ' des valeurs de l'ordre des $\Omega \cdot m$. Cette condition est réalisable en utilisant pour (C_r) du Germanium par exemple.

Pour représenter un milieu très perméable, la couche (C_r), conformément à (III. II. 4), a une résistivité très grande, et disparaît pour μ infini.

Lorsqu'une ligne équiflux, fermée, où $\varphi = \varphi_0$, est connue, il suffit d'imposer le potentiel correspondant v_0 sur cette ligne reproduite par une ligne conductrice disposée sur la couche (C_r).

Lorsque seul un tronçon de ligne équiflux est connu, mais que le système est limité sur le reste d'un contour fermé par du fer très perméable, le bord de la couche (C_r) coïncide avec le fer, tandis que $\varphi = \varphi_0$ est reproduit par une ligne conductrice au potentiel v_0 .

Ce dernier cas est en particulier celui d'un conducteur dans une encoche de machine électrique, pour laquelle le bord supérieur de l'encoche correspond à $\varphi = \text{constante}$, si l'entrefer qui le limite est très étroit, tandis qu'à la surface du fer, μ est très grand.

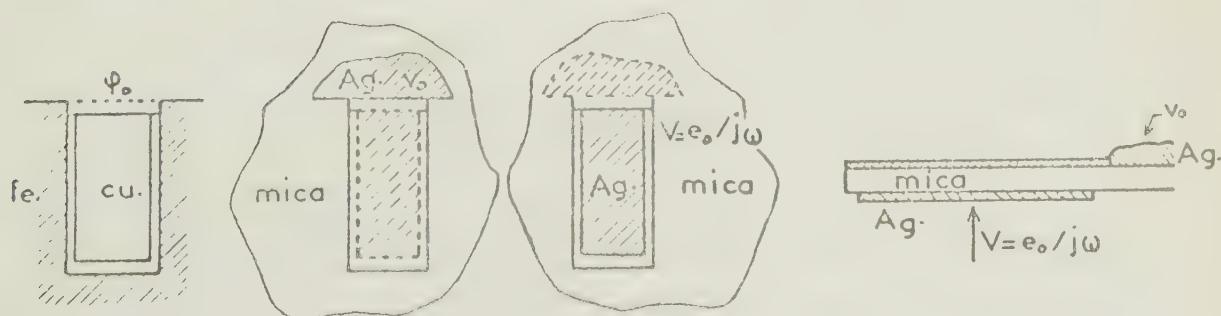


Fig. III. II. 3.

Un tel conducteur et son voisinage sont ainsi reproduits analogiquement par une couche (C_c) identique à sa section droite (où l'on applique $j \omega \bar{V}$ analogue à $\bar{e}$), tandis que la couche (C_r) a la forme de la section droite de l'encoche, le potentiel $\bar{v}_o$ étant imposé au bord supérieur (Fig. III. II. 3)

III. II. 3. - Correspondance entre les impédances objet et image.

D'après la relation (III. II. 4),

$$\frac{\rho_i}{\omega} \text{ correspond à } \frac{d \bar{J}}{\Omega \bar{\epsilon}}$$

Si v_o est l'équipotentielle relative à la valeur φ_o de φ , l'impédance objet $\bar{Z}_o = \frac{\bar{e} - j \omega \bar{\varphi}_o}{\bar{I}}$ que nous avons définie correspond numériquement à

$$\frac{j \omega (\bar{V} - \bar{v}_o)}{\frac{\omega}{\Omega} \frac{d}{\epsilon \rho} \iint \bar{J} dS}$$

Mais, $Z_i = \frac{V - v_o}{\iint J dS}$ est l'impédance directement mesurable

du système analogique image.

Comme

$$dS = dx dy = \lambda^2 dX dY = \lambda^2 dS, \text{ on en déduit}$$

$$\bar{Z}_o = j \Omega \frac{\epsilon \rho}{d \lambda^2} Z_i = j K' Z_i \quad \text{avec} \quad K' = \frac{\epsilon \rho \Omega}{d \lambda^2} \quad (\text{III. II. 7})$$

III. III. - MISE EN OEUVRE DE L'ANALOGIE.

III. III. 1. - Propriétés des matériaux utilisés.

III. III. 1. a. - Influence de la température.

L'alliage résistant étant principalement constitué par du Germanium, une élévation de température diminue la résistance superficielle de la couche (C_r).

Des échantillons de cet alliage ont été déposés sur différents supports (pyrex, verre, mica) et chauffés sous vide.

La résistance de ces échantillons a été mesurée, pour des températures allant de l'ambiante à 200°C environ (Fig. III. III. 1, III. III. 2. , III. III. 3.).

On a déduit des courbes précédentes les coefficients de température $\frac{1}{R} \Delta R / \Delta T$ de l'alliage, au voisinage de la température ambiante. Ceux-ci varient entre 0,5°C et 0,01°C. Le système image doit donc être maintenu à température constante dans une enceinte isotherme. La température agit également, au moment de l'évaporation, sur la stabilité intérieure de la couche.

Si l'évaporation est faite sans chauffage préalable du support, la résistance superficielle de (C_p) évolue lentement au cours du temps. Au contraire, si la couche est réalisée sur un support chauffé aux environs de 300°C, la résistance superficielle reste stable.

III. III. 1. b. - Influence du champ électrique appliqué.

La variation de résistances des couches d'alliage, en fonction du champ appliqué, pour des échantillons évaporés sur support froids, est donné par la figure III. III. 4.

Cette variation de la résistivité de l'alliage est éliminé en réalisant les couches sur supports chauds.

D'autre part, nous avons vérifié que les couches ainsi obtenues ne présentaient aucun effet redresseur, ni aucun effet d'hystérésis.

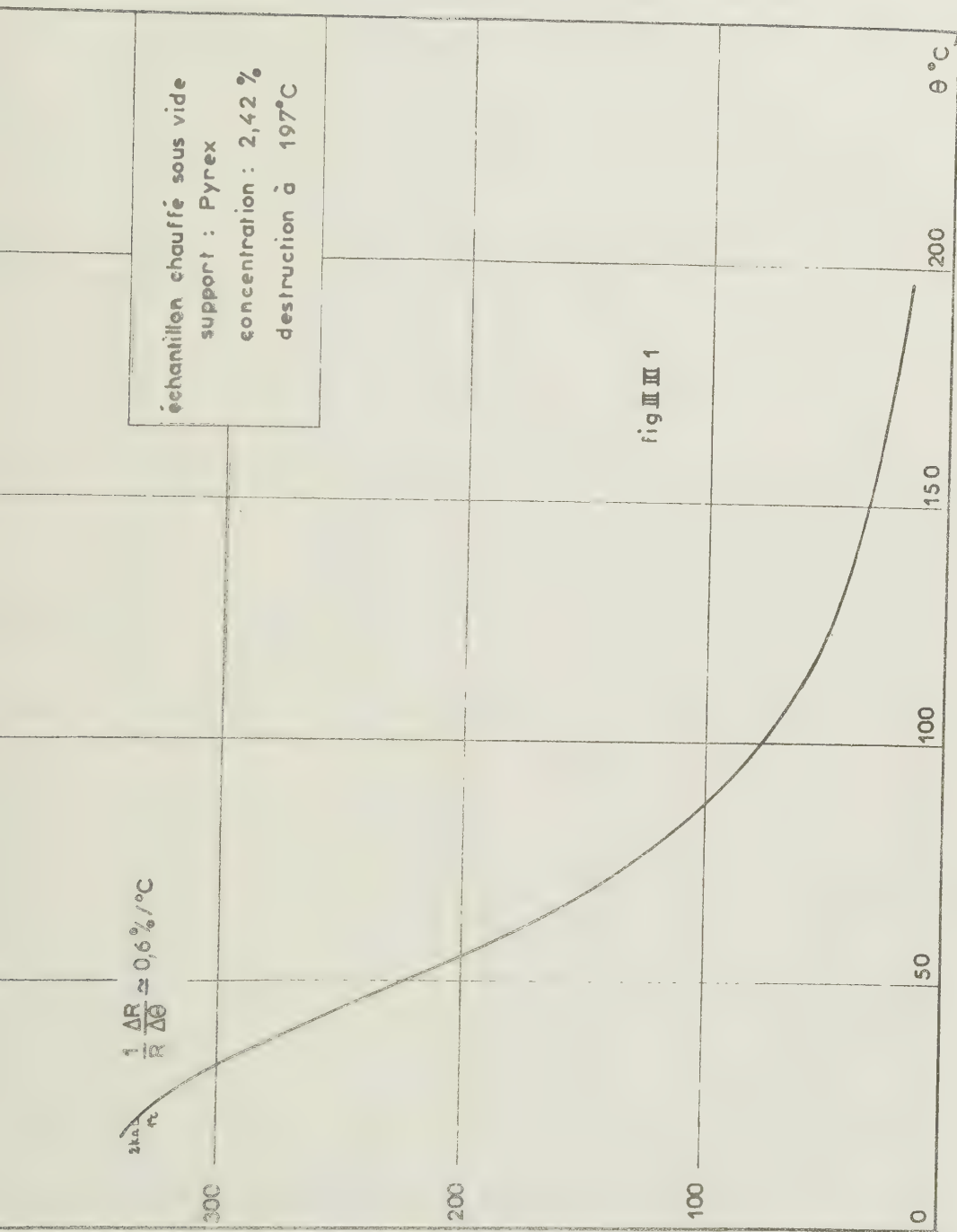
III. III. 1. c. - Oxydation des couches d'alliage.

Des études faites, en particulier par TRILLAT [12] sur l'oxydation des couches minces de Germanium, permettent d'affirmer que l'alliage employé ne s'oxyde pas aux températures utilisées.

$$\frac{1}{R} \frac{\Delta R}{\Delta \theta} \approx 0,6\% / ^\circ\text{C}$$

échantillon chauffé sous vide
support : Pyrex
concentration : 2,42 %
destruction à 197°C

fig III 1



1000

R en kΩ

$$\frac{1}{R} \frac{\Delta R}{\Delta \theta} \approx 1\% / ^\circ\text{C}$$

10 kΩ
1%
1°C

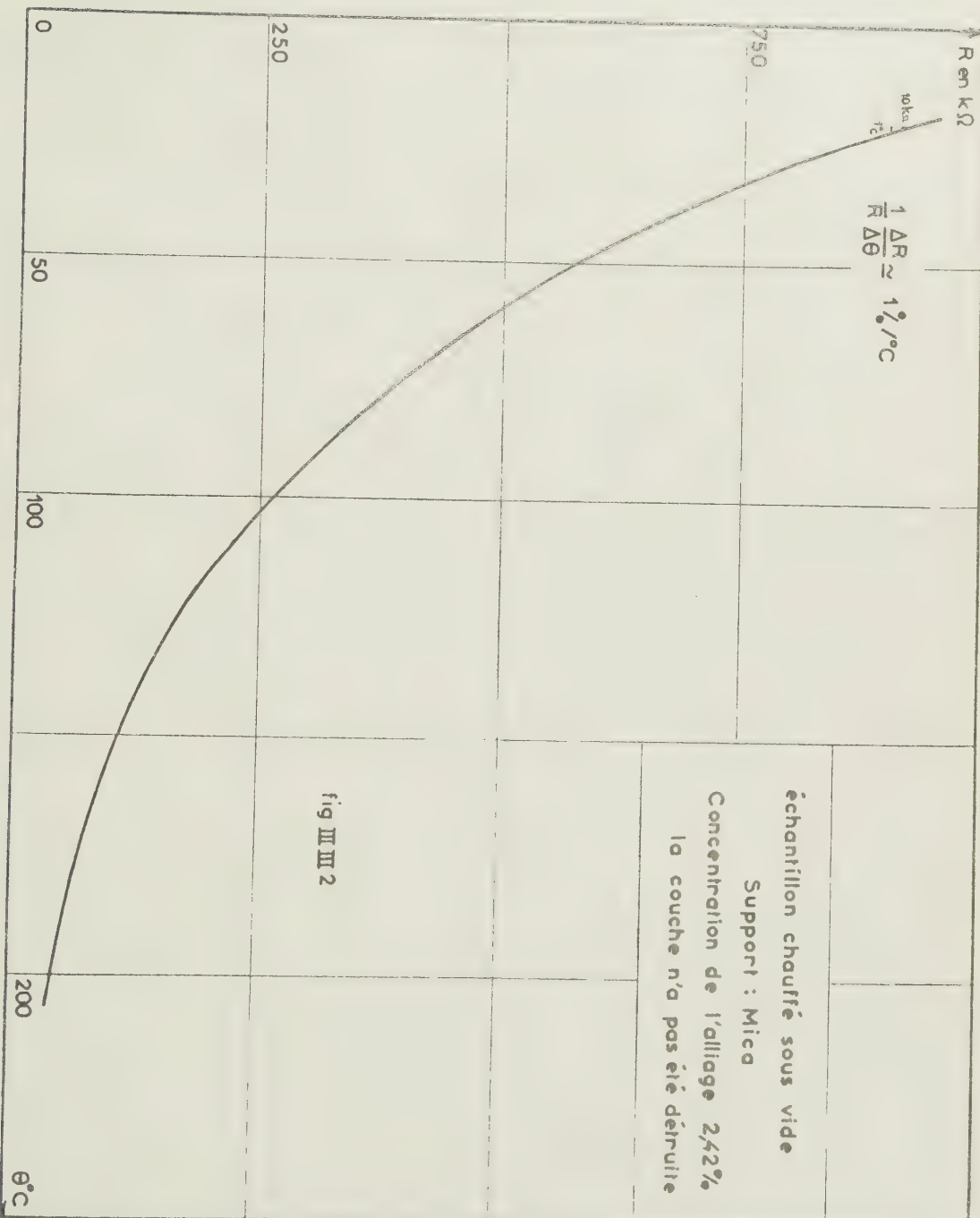
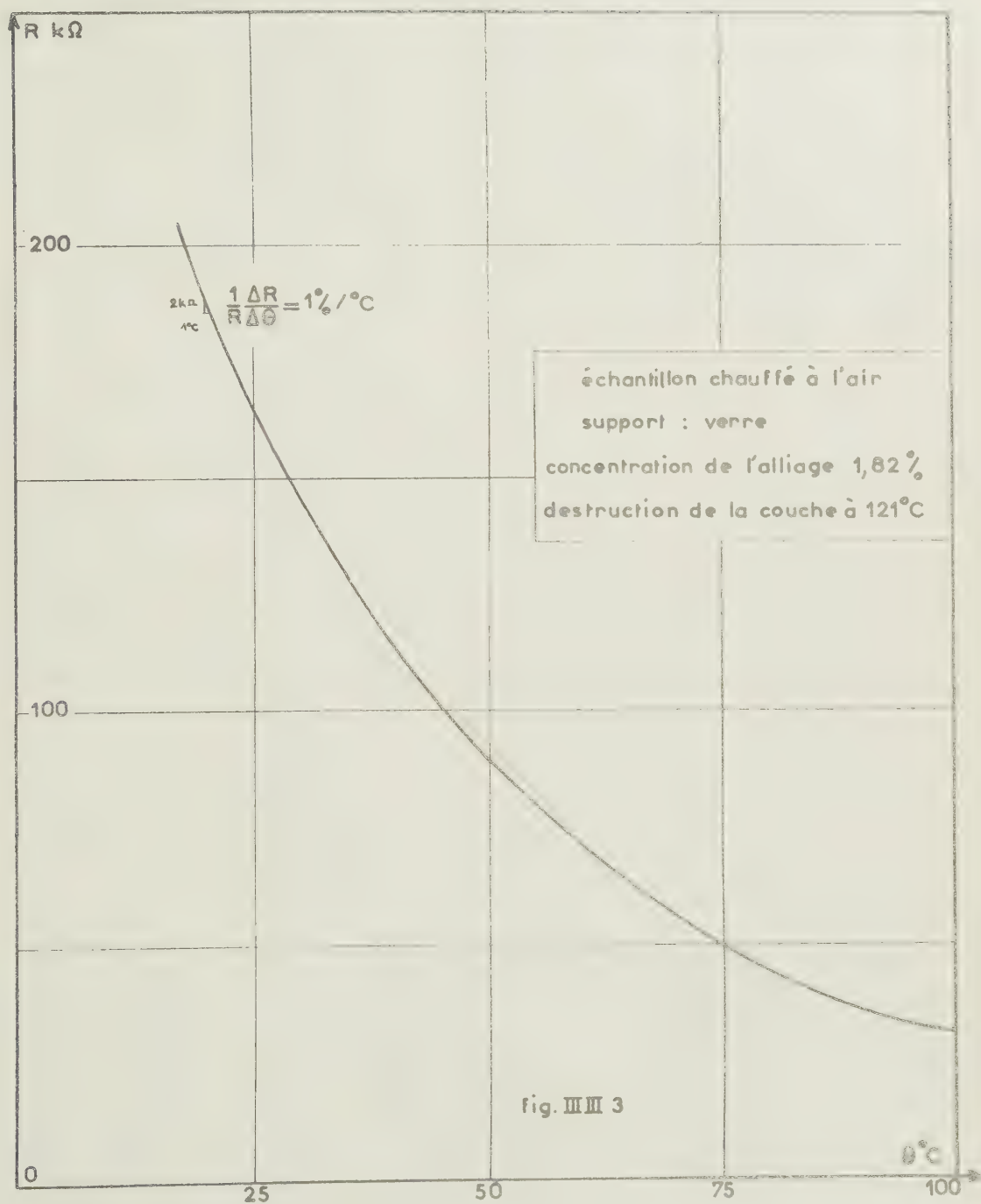
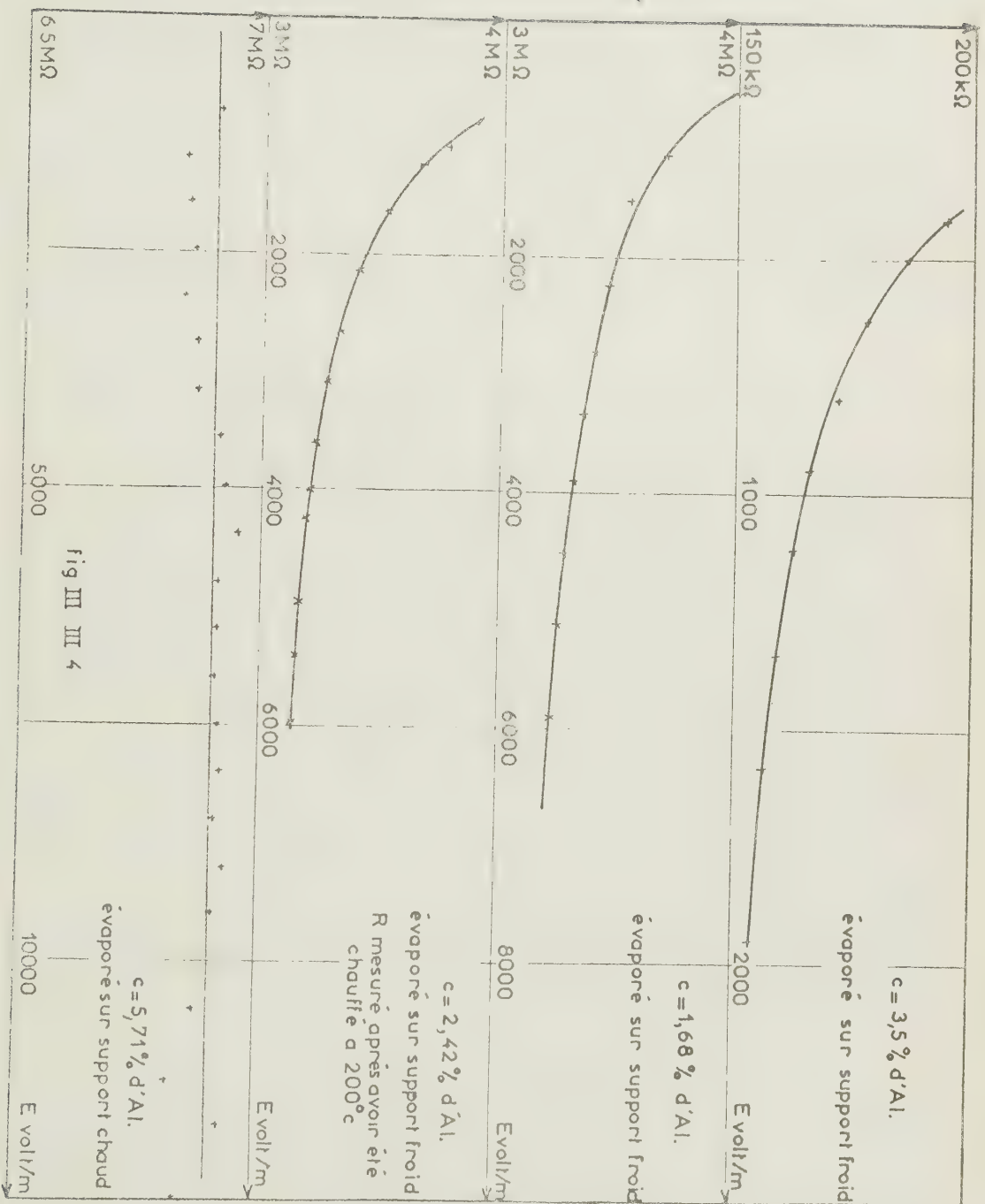


fig III III 2

échantillon chauffé sous vide
Support : Mica
Concentration de l'alliage 2,42%
la couche n'a pas été détruite





En effet, cet auteur n'a obtenu une formation d'oxyde de Germanium (Ge O_2) qu'à une température voisine de 600°C . Comme en outre il n'a observé de transformation du Germanium qu'au-dessus de 480°C suivant le schéma



les couches de Germanium utilisées sont toujours constituées par du métal amorphe.

III. III. 1. d. - Propriétés du diélectrique.

Le diélectrique est constitué par du mica "muscovite", fourni par le Laboratoire de Recherches Physiques de la Sorbonne (*), sous forme de feuilles minces d'environ $8\text{cm.} \times 8\text{cm.}$, d'épaisseur de 30 à 40 microns, dont l'uniformité, contrôlée par l'observation des franges d'égale épaisseur, est meilleure que 1 %.

La grandeur la plus importante du milieu analogique est le rapport $\hat{\epsilon}/d$, qui intervient directement dans le coefficient d'équivalence entre les impédances images et objets (III. II. 7).

La mesure de ce rapport est simple et précise. Il suffit de mesurer la capacité C d'un condensateur dont le mica est le diélectrique. On a

$$\hat{\epsilon}/d = C/S$$

où S est la surface des armatures.

(*) - Nous tenons à remercier ici Madame MORIN-DEVAUX pour l'obligeance avec laquelle elle a assuré notre approvisionnement en lames de mica.

L'erreur la plus importante est commise sur la détermination de S (1 % environ), tandis que celle sur C est négligeable, puisque le pont de SCHERING utilisé donne une précision de $10^{-5}/100$.

Aucune variation du rapport ϵ/d n'a été observée pour des fréquences variant de 100 Hz à 100 KHz. En outre, les pertes diélectriques du mica utilisé sont très faibles ($\tan \delta = 10^{-4}$).

III. III. 2. - Matériel utilisé et technique opératoire.

III. III. 2. a. - L'évaporateur.

L'évaporateur utilisé est du type TR6 - 200 de la Société d'Etude et d'Application du Vide, de l'Optique et de la Mécanique (S.E.A.V.O.M.).

Il se compose :

- d'une pompe à palette ($25\text{m}^3/\text{heure}$ et $5 \cdot 10^{-3}\text{ mm Hg}$).
- d'une pompe à diffusion d'huile de 100 litres/seconde qui donne un vide limite de 10^{-6} mm de Hg avec un piège à azote liquide.
- d'un anneau intermédiaire, muni de 4 supports-creusets, d'un cache-creuset, de passages haute intensité et haute tension.
- d'un cylindre de verre épais qui limite l'enceinte d'évaporation.
- d'une platine supérieure, équipée d'un porte-objet tournant, dont l'axe est incliné à 45° par rapport à la verticale.

L'alimentation électrique est assurée par

- une source basse tension 400 A - 4 volts, qui alimente des creusets en Tungstène de 1mm d'épaisseur, du type "nacelle".
- une source haute tension 2000 volts - 200 mA pour le dégazage.

La pression est mesurée par une jauge à cathode froide Philips.

III. III. 2. b. - Préparation du support de la couche.

Les électrodes, réalisées avec une peinture à l'argent très adhérente, chauffées à 520°C, sont généralement au nombre de 4 (Fig. III. III. 5):

- une pour fixer le potentiel $V = \frac{\bar{e}}{\omega}$
- une pour fixer le potentiel v_0 image de φ

- et deux pour mesurer la résistance superficielle de l'alliage sur une couche témoin évaporée dans les mêmes conditions que la couche C_r .

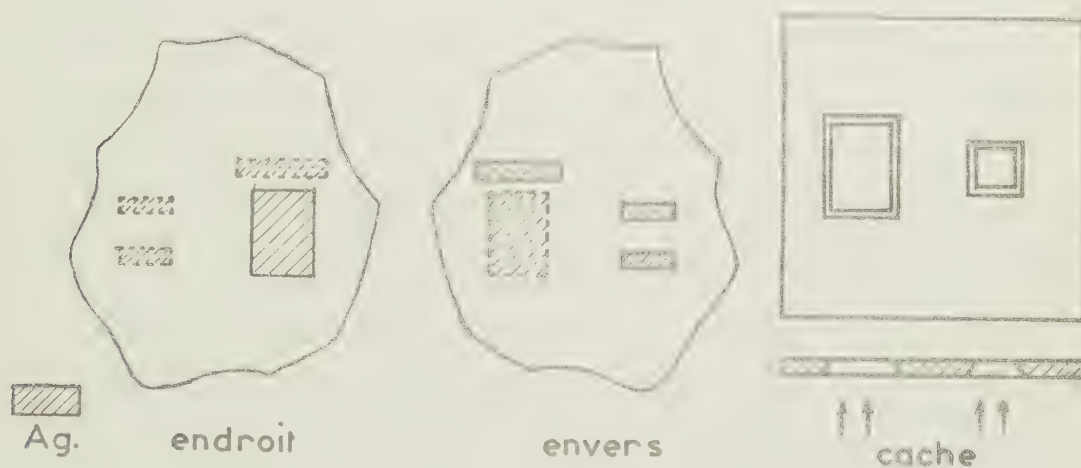


Fig. III. III. 5

On donne à la couche C_r la forme désirée en interposant entre le mica et la source d'évaporation un cache d'aluminium dans lequel sont percés des trous de même dimension que la couche à réaliser.

III. III. 2. c. - Evaporation de l'alliage.

Le contrôle, pendant l'évaporation, de la résistance superficielle de la couche d'alliage se fait, en mesurant la résistance d'une couche témoin carrée C_T (Fig. III. III. 6), puisqu'on a

$$R_T = \rho' \frac{L}{h} = \rho'/h$$

exprimée en Ω , ou en $\Omega_{\square}$ (ohm square).



Fig. III. III. 6

L'évaporation de l'alliage (Al, Ge) se déroule ainsi :

- vers 660°C , l'Aluminium fond, sans s'évaporer, car sa tension de vapeur reste faible jusqu'à 1200°C .
- vers 930°C , le Germanium fond à son tour, et se mélange à l'Aluminium.

- L'évaporation proprement dite débute vers 1500°C , la tension de vapeur du Germanium pur étant de 10 microns de Hg à 1400°C , et de 100 microns de Hg à 1500°C . [13] [14] .

Ce sont ces températures élevées et l'action corrosive du Germanium vis-à-vis des autres métaux qui nécessitent l'emploi d'un creuset en Tungstène.

III. IV. - LIMITES DE VALIDITE DE LA METHODE ANALOGIQUE.

III. IV. 1. - Influence de la différence de potentiel entre les deux faces de la couche résistante.

On a supposé que la couche résistante (C_r) était suffisamment mince pour que la répartition du potentiel soit indépendante de la cote. Vérifions dans quelle mesure cette condition est satisfaite.

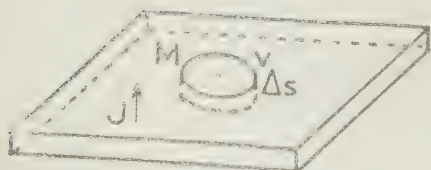


Fig. III. IV. 1

Soit ΔS un petit élément de surface, équipotentielle, au point M de la couche, v le potentiel, et J la densité de courant en ce point (Fig. III. IV. 1).

La résistance entre les deux faces au point M est

$$R = \frac{\rho' h}{\Delta S}$$

La chute de potentiel correspondante est

$$v = \frac{\rho' h}{\Delta S} J \Delta S = \rho' h J$$

Or, d'après (III. II. 1)

$$J = -j \frac{\Omega \varepsilon}{d} (v - V)$$

En prenant comme origine des potentiels l'électrode inférieure, on a donc,

$$\Delta v = -j \varphi' h \frac{\varepsilon \Omega}{d} v$$

ou

$$\frac{\Delta v}{v} = -j \varphi' h \frac{\varepsilon \Omega}{d}$$

L'ordre de grandeur de ce rapport, dans les conditions les plus défavorables, avec les plus grandes valeurs rencontrées pour

ε/d et ρ'

$$\varepsilon/d = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1} \quad \rho' = 20 \Omega \text{ m} \quad h = 1 \mu$$

est

$$\frac{\Delta v}{v} = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 1,7 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \pi F = 21,4 \cdot 10^{-12} F$$

qui reste absolument négligeable à toutes les fréquences F utilisées.

Par ailleurs, la constante diélectrique du Germanium pur étant d'environ 16 [15], [16], la capacité par unité de surface de la couche (C_r) est

$$C = \varepsilon/h = 0,144 \cdot 10^{-3} \text{ Farad./m}^2$$

d'où l'impédance correspondante

$$z = \frac{\rho' h}{\sqrt{1 + (\rho' \varepsilon \Omega)^2}} = \frac{\rho' h}{1 + (\frac{\rho' \varepsilon \Omega}{2})^2} = \frac{20 \cdot 10^{-6}}{1 + 9 \cdot 10^{-18} F^2}$$

qui, à 1 MHz encore, ne diffère pas sensiblement de $\rho' h$.

Donc, le courant de déplacement dans (C_r) reste entièrement négligeable.

III. IV. 2. - Etude de l'épaisseur de la couche.

Si l'épaisseur de la couche d'alliage (C_p) évaporé n'est pas uniforme, il en est de même pour la résistance superficielle et le coefficient d'équivalence K' (III. II. 7). Nous nous sommes donc attachés à réaliser des couches aussi uniformes que possible, et à contrôler leur épaisseur.

III. IV. 2 a. - Dispositif pour l'obtention de couches d'épaisseur uniforme

La quantité de métal déposée étant inversement proportionnelle au carré de la distance à la source, le support, s'il est plan, doit être très éloigné par rapport à ses dimensions. Si ces conditions ne sont pas remplies, la couche obtenue est limitée par une surface concave (Fig. III. IV. 2)

Pour diminuer cet effet, on utilise le système rotatif mentionné, qui atténue les différences d'épaisseur, et a en outre l'avantage de répartir les irrégularités de l'émission de la source sur toute la surface de la couche.

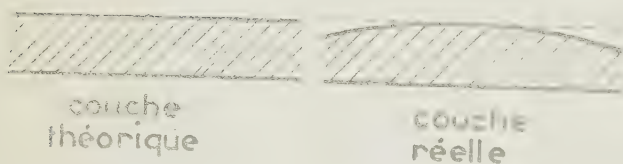


Fig. III. IB. 2

Pour évaluer dans ce cas les variations d'épaisseur de (C_r) en fonction de son étendue, calculons la quantité de métal m déposée en B pendant un tour de plateau.

Soient b , r et r_o les distances OB, SB et SO (Fig. III. IV. 3), et T la période de rotation du plateau, on a

$$m = \frac{k T}{r^2}$$

$$\text{avec } r^2 = r_o^2 + b^2 + 2 r_o b \cos \theta$$

θ étant l'angle que fait OB

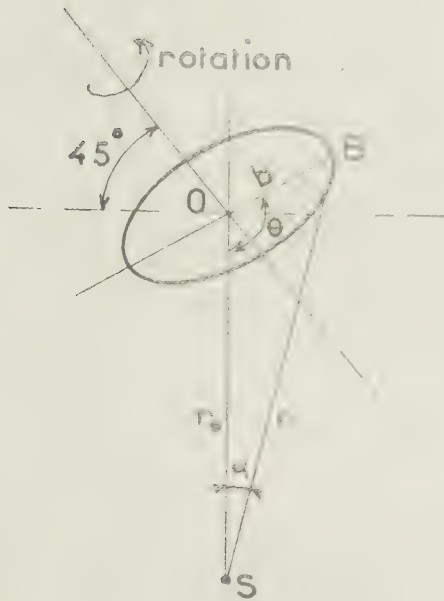


Fig. III. IV. 3

L'inclinaison de l'axe de rotation étant de $\pi/4$, l'angle varie en fonction du temps comme

$$\theta = \pi/4 \cos \frac{2\pi}{T} t + \pi/2$$

Sa valeur moyenne sur une période est

$$\theta_m = \pi/2, \text{ qui donne}$$

$$r^2 = r_o^2 + b^2$$

pour la valeur moyenne de r^2 .

La masse m au point B est donc

$$m = \frac{k T}{r_o^2 + b^2}$$

et en O

$$m_o = \frac{k T}{r_o^2}$$

La différence relative $\frac{\Delta h}{h_o}$ de l'épaisseur finale aux points B et O est ainsi

$$\frac{\Delta h}{h_o} = \frac{\Delta m}{m_o} = \frac{b^2/r_o^2}{1 + b^2/r_o^2} = \frac{\text{tg}^2 \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha} = \sin^2 \alpha$$

à condition que le support ait effectué un grand nombre de tours pendant l'évaporation, ce qui est réalisé, car la rotation se fait à 37 t/mn, et l'évaporation dure de 5 à 6 minutes.

Dans les plus mauvaises conditions, le rapport b/r_o atteint 8 à 10%, ce qui nous donne $\Delta h/h_o$ inférieur à 1%. Compte tenu des irrégularités d'évaporation qui sont réduites dans les conditions opératoires, nous pouvons admettre que l'épaisseur est uniforme à 1% près, ce qui est confirmé par le contrôle qui suit.

III. IV. 2. b. - Contrôle de l'épaisseur des couches obtenues.

Ce contrôle a été effectué sur deux couches évaporées respectivement sur support tournant et sur support fixe.

Pour vérifier l'uniformité de l'épaisseur, nous avons étudié la répartition des potentiels suivant un plan méridien, de chacune des couches alimentées entre deux bords opposés par une source de courant continu V (Fig. III. IV. 4).

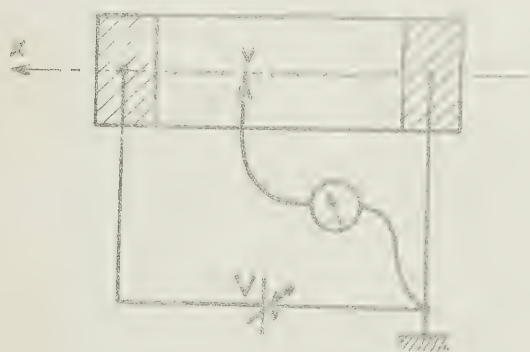


Fig. III. IV. 4

S'il y a uniformité d'épaisseur, la répartition du potentiel est linéaire suivant chaque perpendiculaire aux électrodes

$$v_o = \frac{\rho' x}{h_o} I$$

Sinon, le potentiel sur la méridienne est donné par

$$v = I \int_0^x \frac{\rho' dx}{h(x)}$$

l'épaisseur h étant une fonction de x .

L'écart relatif entre $h(x)$ et h_o pour $x = a$ est donc

$$\frac{\left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_a - \left[\frac{\partial v_o}{\partial x} \right]_a}{\left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_a} = \frac{h_o - h(a)}{h_o} = \frac{\Delta h}{h_o}$$

On détermine $\frac{\partial v}{\partial x}$ en mesurant la différence de potentiel entre n points équidistants pour lesquels la relation précédente donne en première approximation

$$\frac{(v_i - v_{i+1}) - (v_{o,i} - v_{o,i+1})}{v_i - v_{i+1}} = \frac{\Delta h}{h_i}$$

avec $v_{o,i} - v_{o,i+1} = \frac{V}{n}$

Les mesures sur la couche évaporée sur support tournant ont donné, avec diverses valeurs de la tension appliquée

$$n = 5 \quad ; \quad V = 200 \text{ volts} \quad ; \quad v_{o,i} - v_{o,i+1} = 33,3 \text{ volts}$$

Points	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	5 - 6
Δv	33,9	32	34,6	31,4	36,6	31,5
$\Delta h/h$	1,77%	-3,9%	+3,7%	-6,05%	9%	-5,7%

$$V = 100 \text{ volts} \quad v_{o,i} - v_{o,i+1} = 16,66 \text{ volts}$$

Points	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	5 - 6
Δv	16,85	16,45	16,9	16,8	17	16
$\Delta h/h$	1,15%	-1,28%	1,42%	0,83%	2%	-4,1%

$$V = 50 \text{ volts} \quad ; \quad v_{o,i} - v_{o,i+1} = 8,33 \text{ volts}$$

Points	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	5 - 6
Δv	8,4	8,2	8,5	8,9	7,8	8,2
$\Delta h/h$	+0,84%	-1,6%	2%	6,4%	-6,8%	-1,6%

La variation d'épaisseur n'est donc pas décelable de manière certaine sur cette couche.

Pour la couche évaporée sur support fixe, les mesures ont donné

$$n = 5 \quad ; \quad V = 9,9 \text{ volts} \quad ; \quad v_{o,i} - v_{o,i+1} = 1,65 \text{ volts}$$

Points	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	5 - 6
Δv	1,55	1,25	1,3	1,4	1,7	1,7
$\Delta h/h$	-6,5%	-32%	-27%	-18%	+3%	+3%

La diminution d'épaisseur du centre au bord est au contraire très importante ici.

III. IV. 3. - Mesure de la valeur absolue de l'épaisseur de la couche.

L'analogie décrite n'est valable que si l'épaisseur h de la couche d'alliage (C_r) est très faible devant celle d du diélectrique (D) qui est de 30 à 40 microns.

Pour mesurer l'épaisseur, nous avons utilisé la méthode de S. TOLANSKY [17].



La couche d'épaisseur inconnue (C_i) est évaporée sur un support de verre, sans le recouvrir entièrement.

On lui superpose ensuite un dépôt d'Aluminium qui déborde sur la partie du support restée libre. Ce dépôt est donc limité par la ligne brisée PQRS, où QR est égale à l'épaisseur de (C_i) (Fig. III. IV. 5).

La surface obtenue est éclairée en lumière monochromatique à travers une lame semi-transparente qui forme avec elle un coin d'air dont on observe les franges. Si la ligne de discontinuité d'épaisseur QR est perpendiculaire à l'arête du coin, les franges subissent un décalage proportionnel à QR.

Cette méthode permet de déterminer l'épaisseur de la couche à quelques dizaines d'Å près. Nous l'avons utilisée à la détermination de l'épaisseur de deux couches de résistance superficielle 100 et 200 $\text{k}\Omega$.

Pour ces couches, nous avons obtenu une épaisseur h de 0,5 et 0,3 microns. Comme la résistivité des couches mises en œuvre est toujours restée de l'ordre de 100k Ω au moins, l'épaisseur h a toujours été faible devant d .

III. IV. 4. - Comportement de la résistance de la couche en fonction de la fréquence.

Les mesures de l'impédance image de l'encoche étant faites à fréquence variable, la résistance superficielle de la couche (C_r) doit être indépendante de la fréquence. La vérification de cette propriété permet en outre de contrôler que (C_r) est exclusivement résistive.

Ces mesures ont été faites sur une couche carrée, avec un acuiètre Ferrisol, grâce auquel on mesure l'amortissement apporté à un circuit résonnant par l'impédance étudiée.

Entre 100 kHz et 2,1 MHz, nous avons obtenu

F en kHz	100	200	300	400	500	600	700	750	800
R en k Ω	236	246	240	244	243	249	239	245	250
F en kHz	850	900	950	1000	1100	1200	1300	1400	1500
R en k Ω	249	250	242	239	239	237	237	240	245
F en MHz	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,1			
R en k Ω	252	237	241	238	239	239			

La résistance superficielle $R_{\square} = 243k\Omega \pm 3,5 \%$ est ainsi indépendante de la fréquence.

La couche présente en outre une capacité de 1,7pF en parallèle entre ses électrodes.

III. IV. 5. - Influence de la courbure des lignes de force du champ électrique dans le mica.

La relation (III. II. 1)

$$\vec{J} = \frac{c}{d} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{dV}{dt} \right)$$

impose que les lignes de force du champ électrique $\vec{E}$ dans le diélectrique soient parallèles à Oz (Fig. III. IV. 6).

Si l'en n'est pas ainsi, $\vec{J}$, qui est parallèle à $\vec{E}$, est alors donné par

$$\vec{J} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

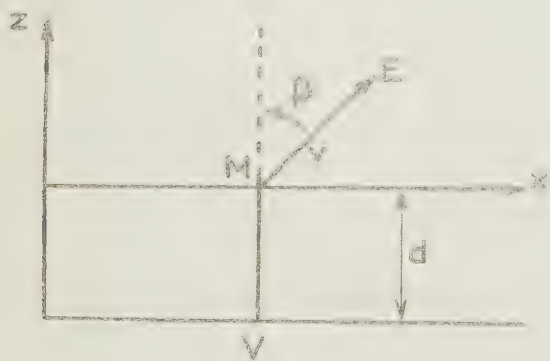


Fig. III. IV. 6

Soit M un point de la surface de séparation entre (D) et (C_r).

La composante horizontale de $\vec{E}$ en M est

$$- \text{grad } v$$

sa composante verticale

$$\frac{V - v}{d}$$

L'inclinaison β du champ $\vec{E}$ est donnée par

$$\text{tg } \beta = \frac{d \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2}}{V - v}$$

Si on se place dans le plan de section méridienne perpendiculaire à l'équipotentielle qui passe en M, dans lequel l'effet est le plus accentué, on a

$$\text{tg } \beta = d \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{V - v}$$

Evaluons alors l'ordre de grandeur de $\text{tg } \beta$ dans les conditions suivantes :

$$d = 30 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad V - v = 5 \text{ volts} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 10^3 \text{ V/m.}$$

on a

$$\text{tg } \beta = \dots$$

Le terme $\frac{\partial v}{\partial x}$ varie comme $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ qui est une fonction exponentielle de la fréquence, quand celle-ci est élevée (Chapitre I).

Il en résulte que pour des fréquences élevées, $\operatorname{tg} \beta$ n'est plus négligeable. La mesure de $\frac{\partial v}{\partial x}$ montre que jusqu'à 50 kHz, environ, $\operatorname{tg} \beta$ ne dépasse pas 0,01 : jusqu'à cette fréquence, l'analogie reste donc valable.

CHAPITRE IV

RESULTATS EXPERIMENTAUX

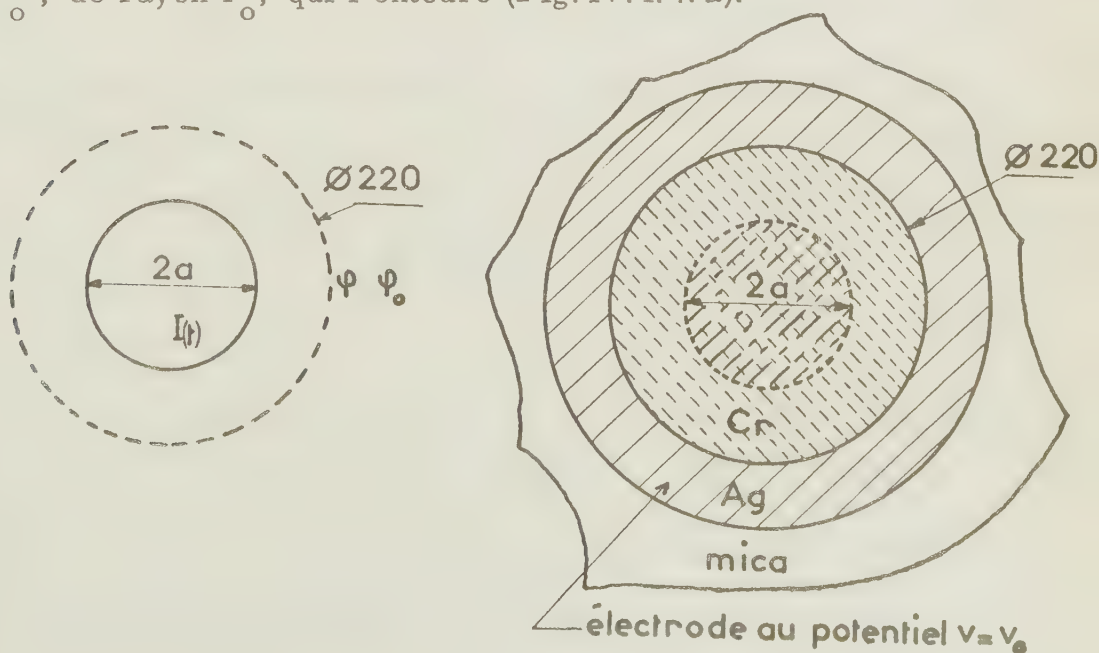
La première partie de ce chapitre est consacrée à la vérification expérimentale de l'analogie, sur des exemples simples, et la deuxième, à la détermination de l'impédance linéique de quelques encoches particulières.

IV. I. - VERIFICATION DE LA METHODE.

IV. I. 1. - Cas du conducteur cylindrique de section circulaire.

IV. I. 1. a. - Représentation du système.

Soit un conducteur de rayon a , et la ligne équipotentielle où $\varphi = \varphi_0$, de rayon r_0 , qui l'entoure (Fig. IV. I. 1. a).



(a)

(b)

Fig. IV. I. 1.

Son image analogique est représentée par la figure (IV. I. 1. b), où les parties hachurées en traits pleins et en traits mixtes représentent les domaines conducteurs de part et d'autre du diélectrique (D), et la partie hachurée en traits pointillés, la couche résistante (C_r).

L'impédance objet du système est (I. IV. 13 et I. IV. 14)

$$Z_o = R + j \mathcal{L} \omega + j M' \omega$$

avec

$$R = R_o \frac{Ka}{2} \frac{M_o(Ka)}{M_l(Ka)} \cos \left[\theta_o(Ka) - \theta_l(Ka) + \frac{3\pi}{4} \right]$$

$$\mathcal{L} \omega = R_o \frac{Ka}{2} \frac{M_o(Ka)}{M_l(Ka)} \sin \left[\theta_o(Ka) - \theta_l(Ka) + \frac{3\pi}{4} \right]$$

$$M' \omega = \frac{\omega \mu}{2\pi} \text{Log} \frac{r_o}{a} = \mu_o f \text{Log} \frac{r_o}{a}$$

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ étant la fréquence objet.

Le module de Z_o est donc

$$|Z_o| = \sqrt{R^2 + (\mathcal{L} \omega + M' \omega)^2}$$

IV. I. 1. b. - Calcul de $|Z_o|$ à différentes fréquences.

Les données numériques sont les suivantes, pour l'exemple utilisé

$$2a = 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad 2r_o = 49 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\mu = \mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ henry/m}$$

d'où

$$R_o = \frac{\rho}{\pi a} = 296 \cdot 10^{-6} \Omega/\text{m}$$

$$M' \omega = 20,62 \cdot 10^{-7} f \Omega/\text{m}$$

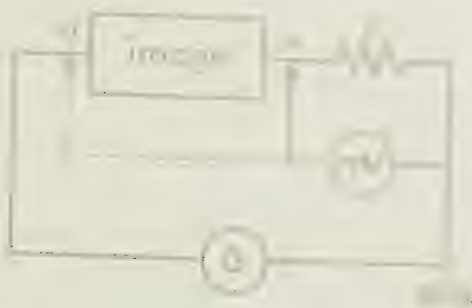
$$aK = a \sqrt{\frac{\epsilon_o \epsilon_r}{1 - \epsilon_r}} = 91,9 \cdot 10^{-3} \sqrt{f}$$

Les valeurs de $M_o(Ka)$ et de $M_l(Ka)$ ont été prises dans des tables numériques [18] et [19].

Les résultats obtenus sont traduits par la courbe (IV. I. 2), qui donne $|Z_o| = f(f)$ de 50 à 10 000 Hz.

IV. I. 2. COURBE DE LA VARIATION DE $|Z_o|$ AVEC LA FRÉQUENCE

Le montage utilisé est celui de la figure (IV. I. 3), où G est



un générateur basse fréquence à battement, Marconi, dont le zéro de fréquence se règle avec précision, mV un millivoltmètre amplificateur Philips, type 6012, de $10\text{ M}\Omega$ d'impédance d'entrée, r une résistance à couche de $10\text{ k}\Omega$.

Fig. IV. I. 3.

L'impédance de l'image traversée par le courant efficace $i = v/r$, est :

d'où

K' étant le coefficient défini par (III. II. 7).

Si Ω est la pulsation de la fréquence image F, on détermine la fréquence objet f qui lui correspond par

$$\frac{f}{F} = \frac{\Omega}{\Omega_0}$$

La vérification de la méthode se réduit alors à la comparaison de Z'_o et de Z_o à toutes les fréquences.

IV. I. 3. MONTAGE UTILISÉ (Fig. IV. I. 3)

La courbe en trait plein représente la variation théorique de Z_o avec la fréquence.

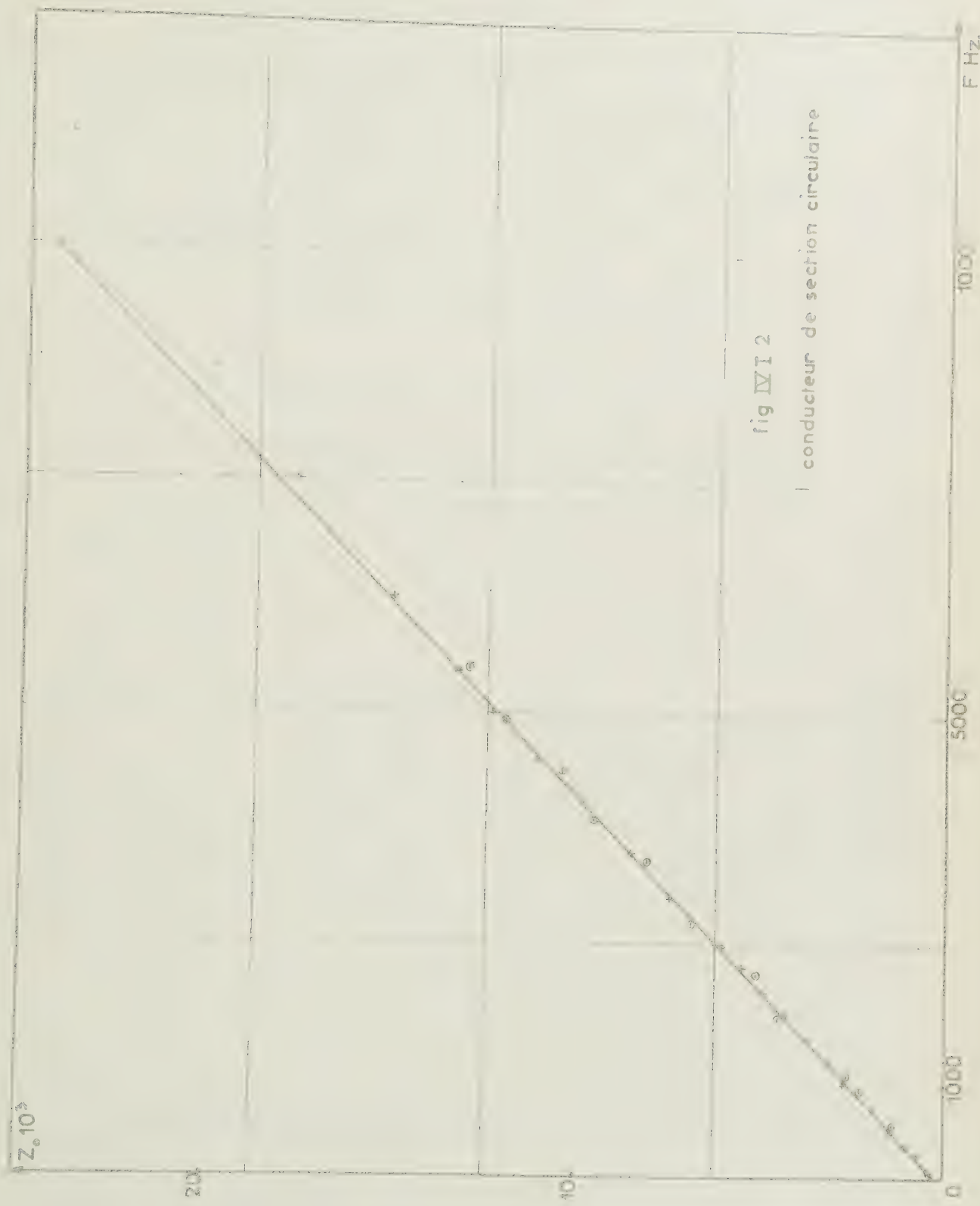


fig IV I 2

conducteur de section circulaire

Les points repérés par $\oplus$ et $\ominus$ correspondent à la valeur de Z'_0 pour deux séries de mesures :

1ère série : $\oplus$ Concentration de l'alliage : 1,84% d'Al

$$\rho'/h = 20 \text{ M}\Omega \quad \epsilon/d = 1,495 \cdot 10^{-6}$$

$$\Omega/\omega = 2,01 \quad \text{et} \quad 100 < F < 25\,000 \text{ Hz}$$

2ème série : $\ominus$ $\rho'/h = 22 \text{ M}$ $\Omega/\omega = 1,82$

$$50 < F < 10\,000 \text{ Hz}$$

Les autres paramètres sont inchangés.

IV. I. 2. - Encoche rectangulaire de machine électrique.

IV. I. 2. a. - Représentation et mesure de l'impédance image

L'encoche objet et son image sont représentées par la figure IV. I. 4.

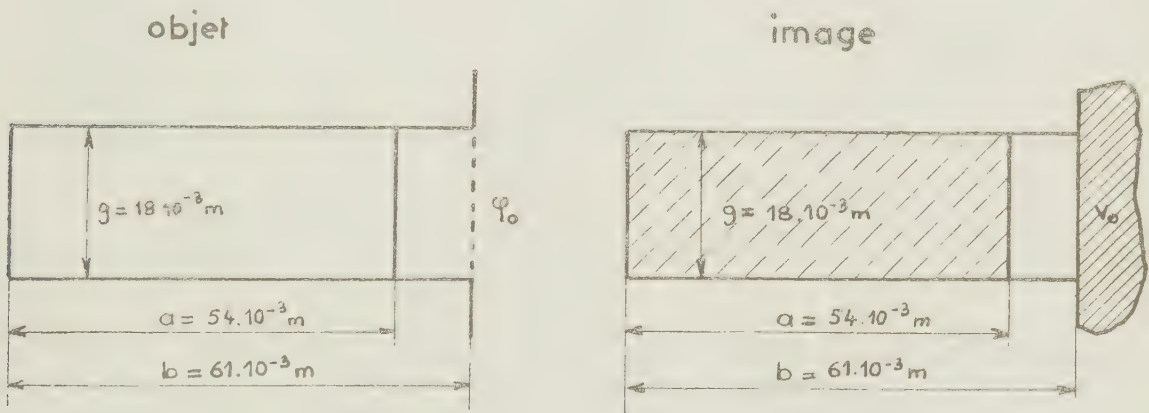
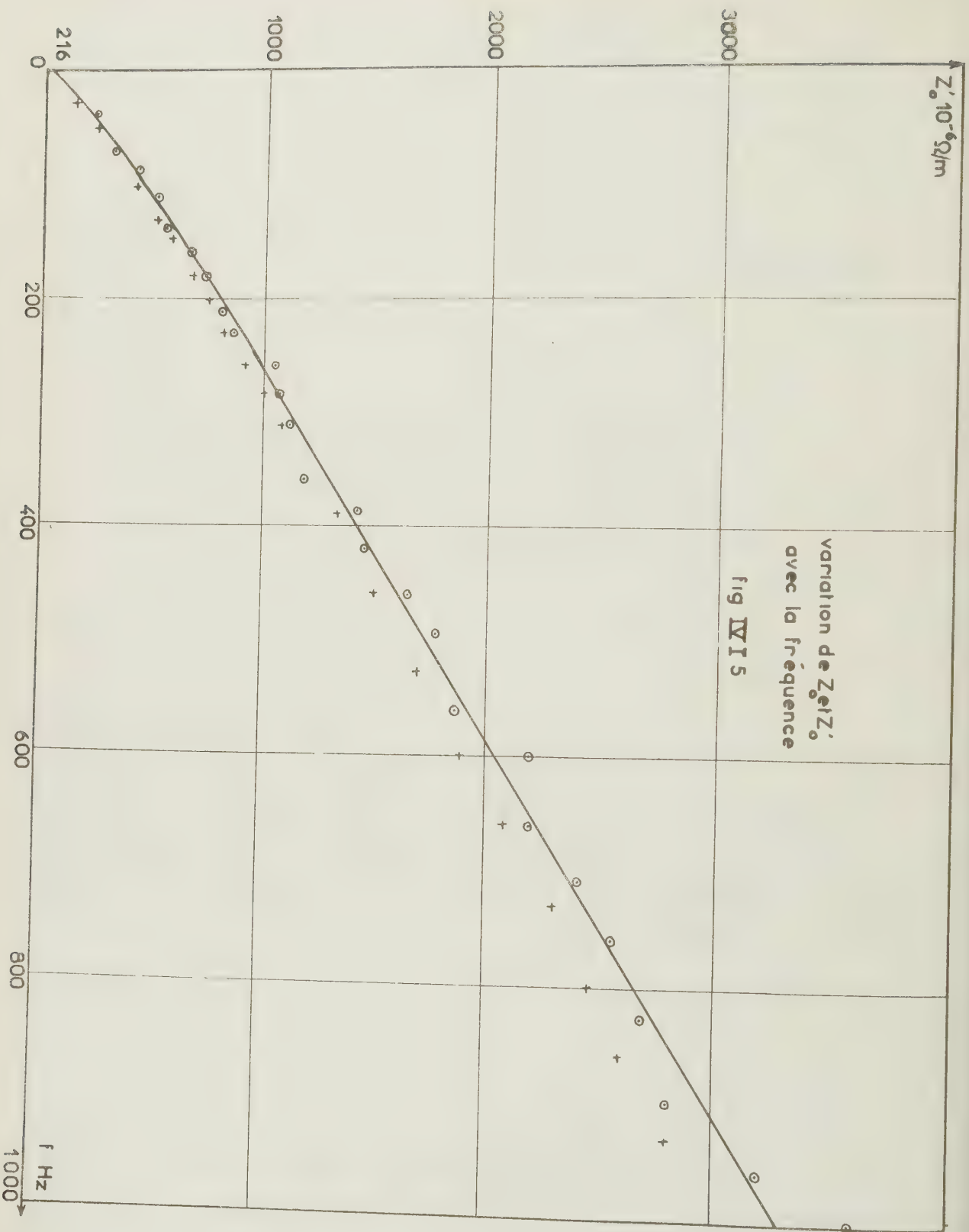


Fig. IV. I. 4.

Le calcul de l'impédance objet à partir des formules (I. IV. 6)

donne

$$|Z_0| = \sqrt{r^2 + (x + x')^2}$$



variation de $Z_0' Z_0'$
avec la fréquence

fig IV 15

avec

$$r = R_o ka \frac{\text{sh } 2 ka + \sin 2 ka}{\text{ch } 2 ka - \cos 2 ka}$$

(IV.1.1)

$$x = R_o ka \frac{\text{sh } 2 ka - \sin 2 ka}{\text{ch } 2 ka - \cos 2 ka}$$

$$x' = \mu_o \omega \frac{D \cdot g}{g}$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega \mu_o}{2 \rho}}$$

qui se réduisent à

$$x = r = R_o k$$

et

$$\frac{r}{R_o} = 1 + \frac{4}{45} k^4$$

$$\frac{x}{R_o} = \frac{2}{3} k^2 \left(1 - \frac{8}{315} k^4 \right) \quad \text{si } k < 1$$

Valeurs numériques .

$$\mu_o = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ henry/m}$$

$$\rho = 2,1 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

(résistivité du cuivre à chaud)

$$R_o = \frac{\rho}{a g} = 21,6 \cdot 10^{-6} \Omega/\text{m}$$

$$ak = 0,738 \sqrt{F}$$

$$x' = 3,06 \cdot 10^{-6} F$$

L'impédance objet Z_o a été calculée pour des fréquences comprises entre 5 et 1 000 Hz, et Z_i a été mesurée par la méthode déjà utilisée pour le conducteur de section circulaire. De Z_i , on déduit $Z'_o = j K' Z_i$ que l'on compare à Z_o .

Résultats figure IV.1.5.

1ère série de mesures : ⊕ Concentration de l'alliage :

1,68 % d'Aluminium

$$\rho'/h = 0,91 \text{ M}\Omega \cdot \text{g/d} = 1,69 \cdot 10^{-6}$$

$$200 < F < 37\,500 \text{ Hz}$$

2ème série de mesures : $\ominus$ Concentration : 1,68 % d'Al
 $\rho'/h = 1,22 \text{ M}\Omega$ $\epsilon/d = 1,69.10^{-6}$
 $70 < F < 40\,000 \text{ Hz}$

La courbe en trait plein représente la variation de Z_0 avec la fréquence.

IV. I. 2. b. - Mesure de la résistance et de l'inductance linéiques

L'impédance Z_i peut se mettre sous la forme

$$Z_i = A - j B$$

Elle est donc représentée par une résistance et une capacité en série ou en parallèle.

Les parties réelles et imaginaires de Z_i sont alors mesurées avec un pont dont les 4 branches sont constituées par : (figure IV. I. 6)

- l'impédance à mesurer Z_i
- une tête de pont formée par 2 résistances égales, de valeurs connues à 0,5 % près, et du même ordre de grandeur que Z_i .
- une capacité et d'une résistance variables étalons en série.

Ce montage donne des résultats satisfaisants pour des fréquences allant de 200 à 5000 Hz.

Pour les fréquences supérieures, un pont d'un autre type est utilisé, il est constitué ainsi : (Fig. IV. I. 6 bis).

- l'impédance à mesurer
- une résistance et une capacité variables étalons en parallèle.
- le secondaire d'un transformateur à très faibles fuites, formé de 2 enroulements dont le nombre des spires est respectivement n_1 et n_2 , constitue la tête de pont.

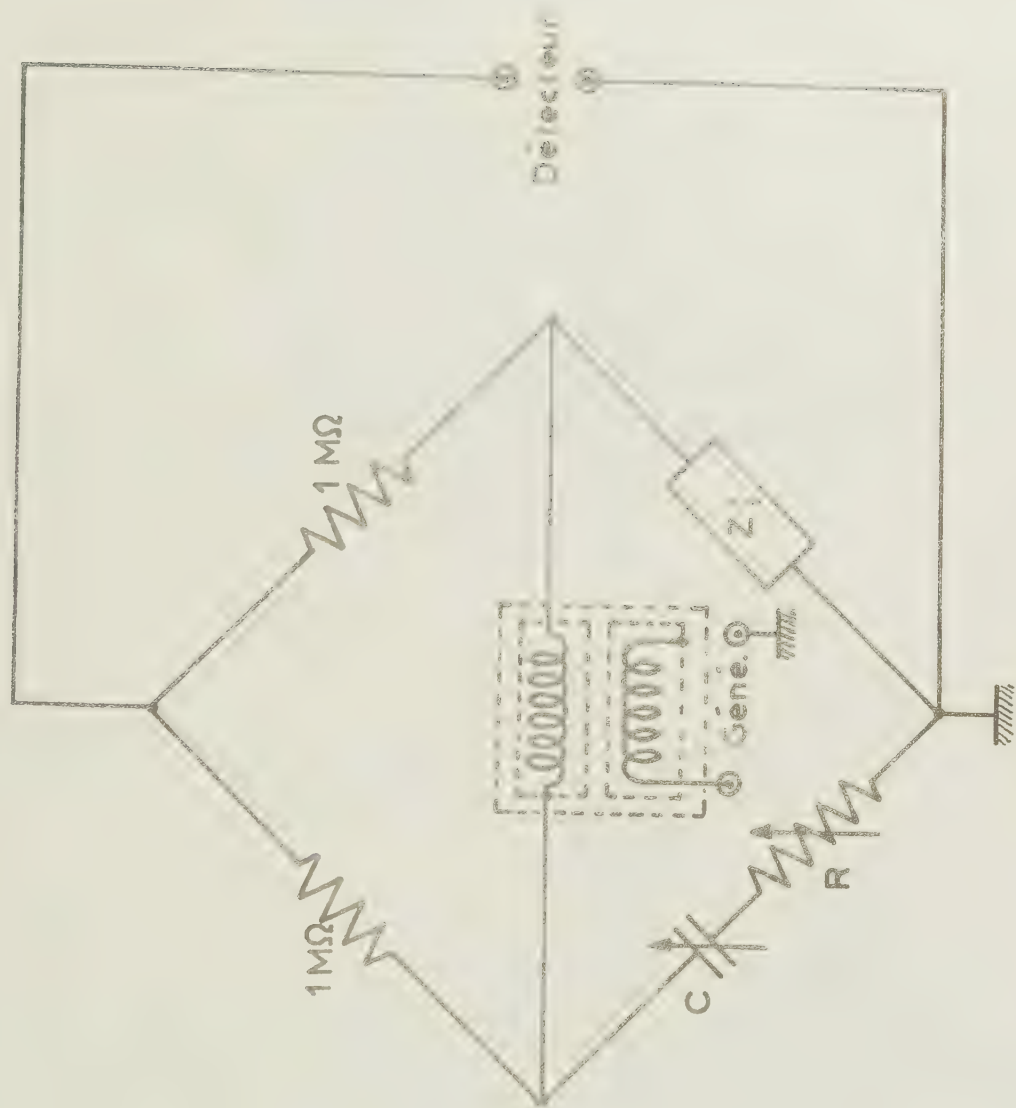


fig IV I 6

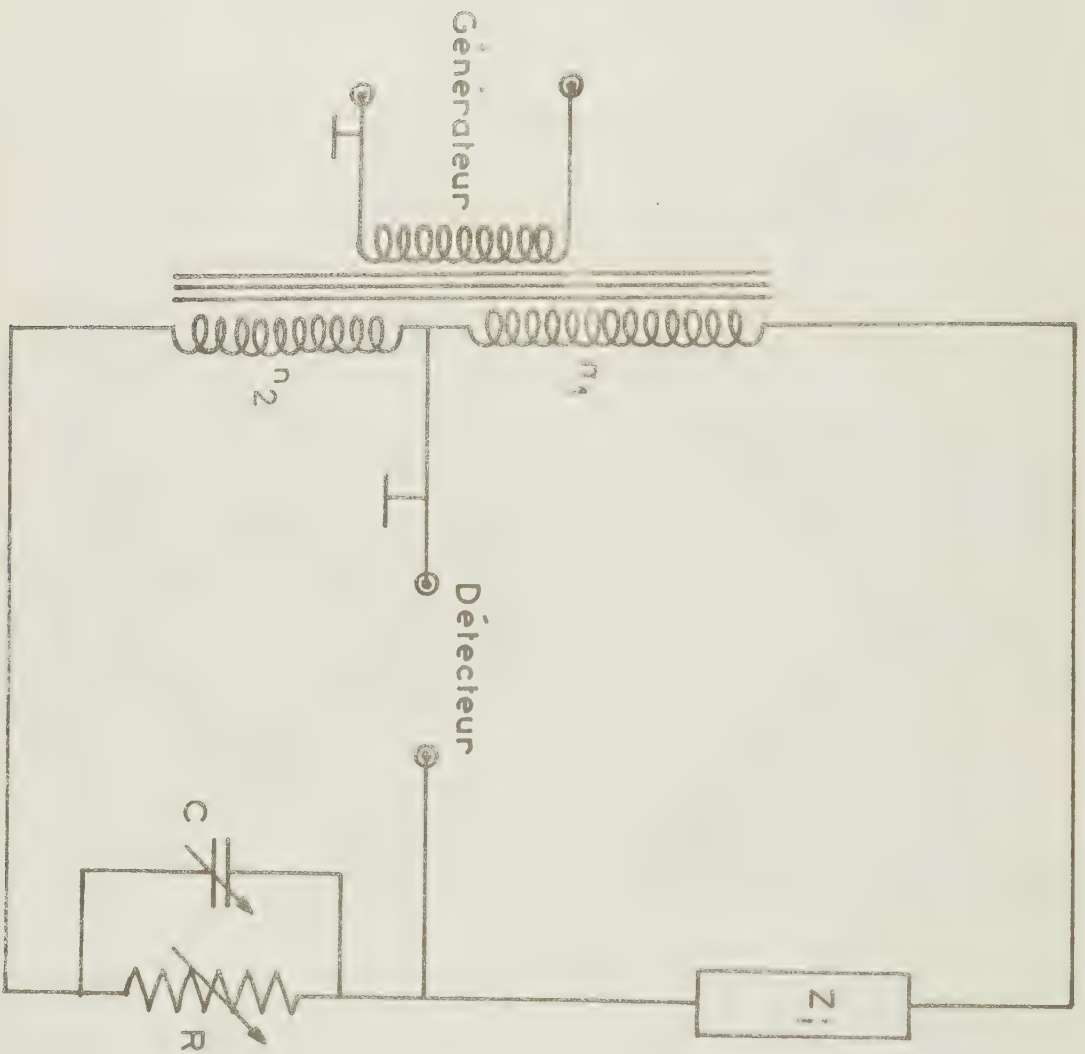
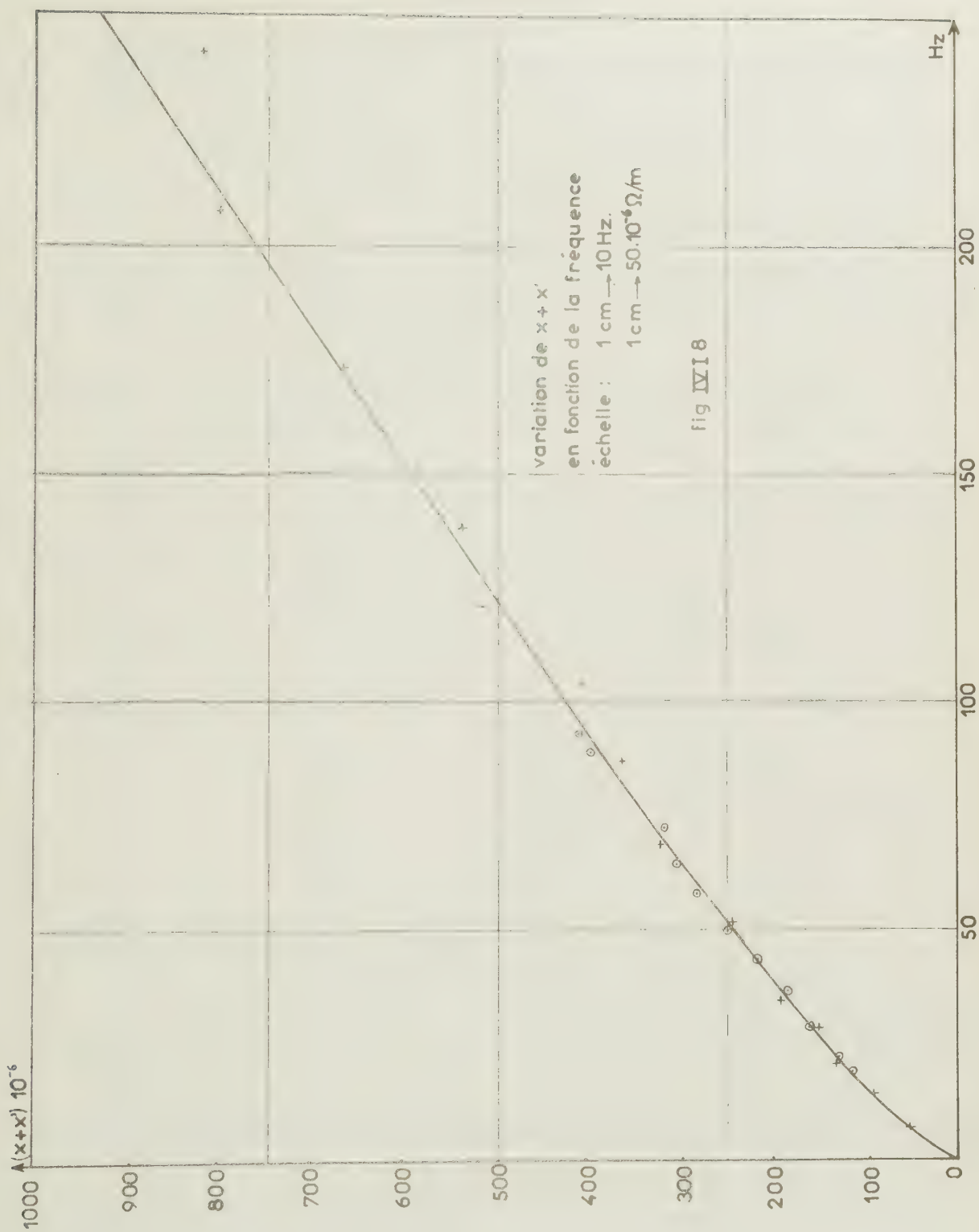
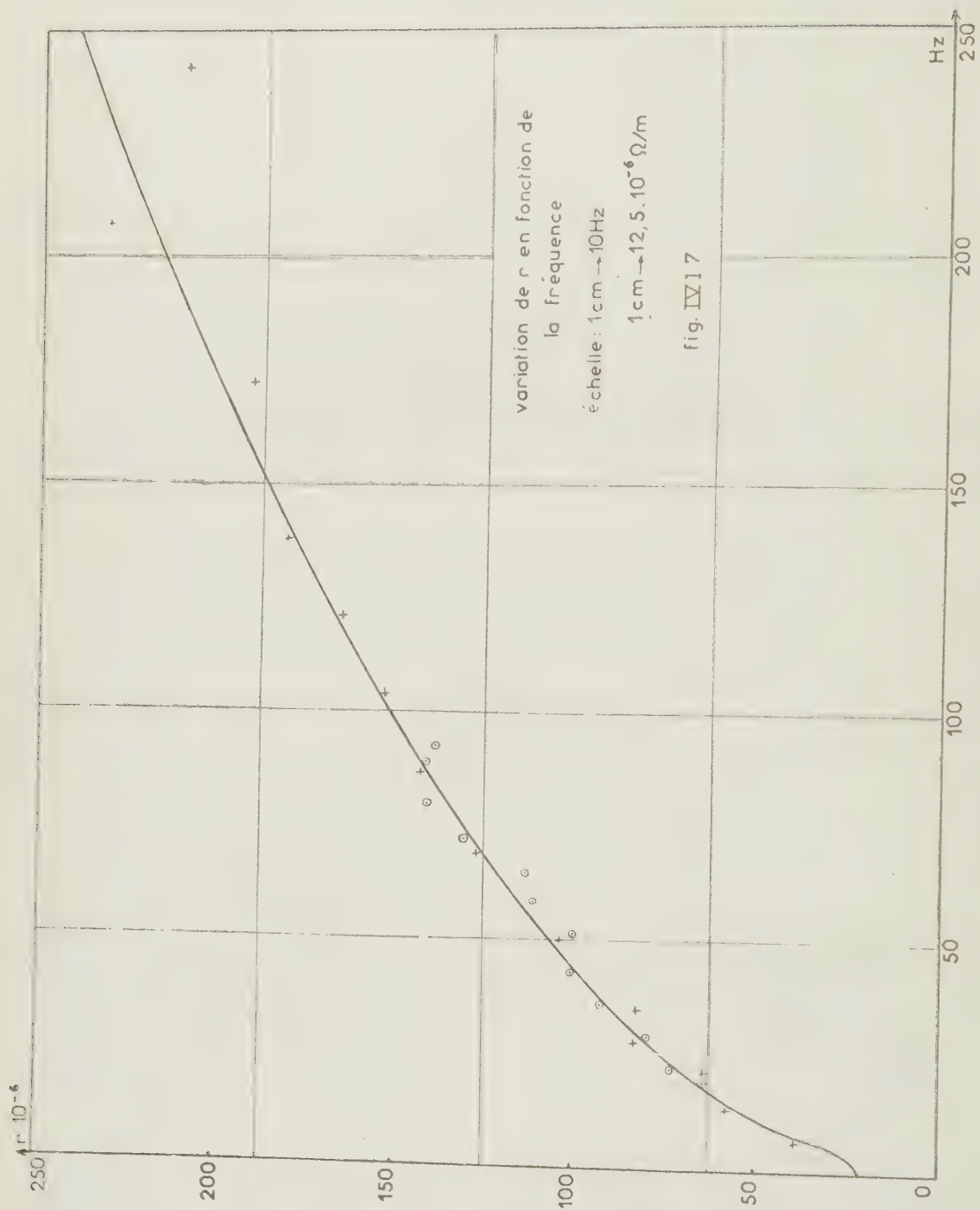


fig. IV 1 6 bis





A l'équilibre, on a

$$A = \frac{n_1}{n_2} \frac{R}{1 + (R C \Omega)^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{n_1}{n_2} \frac{R^2 C \Omega}{1 + (R C \Omega)^2}$$

Comme n_2 est petit devant n_1 , le coefficient multiplicateur $\frac{n_1}{n_2}$ est élevé, et permet de mesurer des impédances de grande valeur.

Ce montage présente en outre l'avantage d'éliminer pratiquement les courants parasites à 50 Hz, et de repérer nettement l'équilibre du pont.

Il a été utilisé de 100 Hz à 20 kHz; au-delà, les capacités parasites ne sont plus négligeables devant C qui est alors de quelques centaines de pico Farad.

Résultats obtenus (Fig. IV. I. 7 et IV. I. 8).

De Z_i mesuré avec le pont de la figure IV. I. 6., on déduit les variations de r et de $x + x'$ en fonction de la fréquence

1ère série de mesures : $\oplus$

Concentration de l'alliage :

1,68 % d'Aluminium

$$\rho'/h = 1,22 \text{ M}\Omega \text{ cm}^2/d = 1,69 \cdot 10^{-6}$$

$$\Omega/\omega = 28,25$$

$$200 < F < 7\,000 \text{ Hz}$$

2ème série de mesures : $\ominus$

$$\rho'/h = 1,3 \text{ M}\Omega$$

$$500 < F < 2\,600 \text{ Hz}$$

Les autres paramètres étant inchangés.

IV. I. 2. c. - Mesure de la répartition de la fonction ψ

Quand l'encoche ne contient qu'un seul conducteur, ψ est réparti suivant la loi (I. IV. 3) :

$$\Phi = \frac{ch \theta}{ch \alpha}$$

En développant cette expression, on peut déterminer le module de Φ en chaque point, soit :

$$|\tilde{\Phi}| = |\tilde{\Phi}_0| \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2 kx + \cos 2 kx}{\operatorname{ch} 2 ka + \cos 2 ka}}$$

Posons

$$\varphi_r = \frac{|\tilde{\Phi}|}{|\tilde{\Phi}_0|} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2 kx + \cos 2 kx}{\operatorname{ch} 2 ka + \cos 2 ka}}$$

L'image de φ_r , soit $v_r = \frac{|\tilde{v}|}{|\tilde{v}_0|}$, est mesurée grâce au

montage suivant (Fig. IV. I. 9).

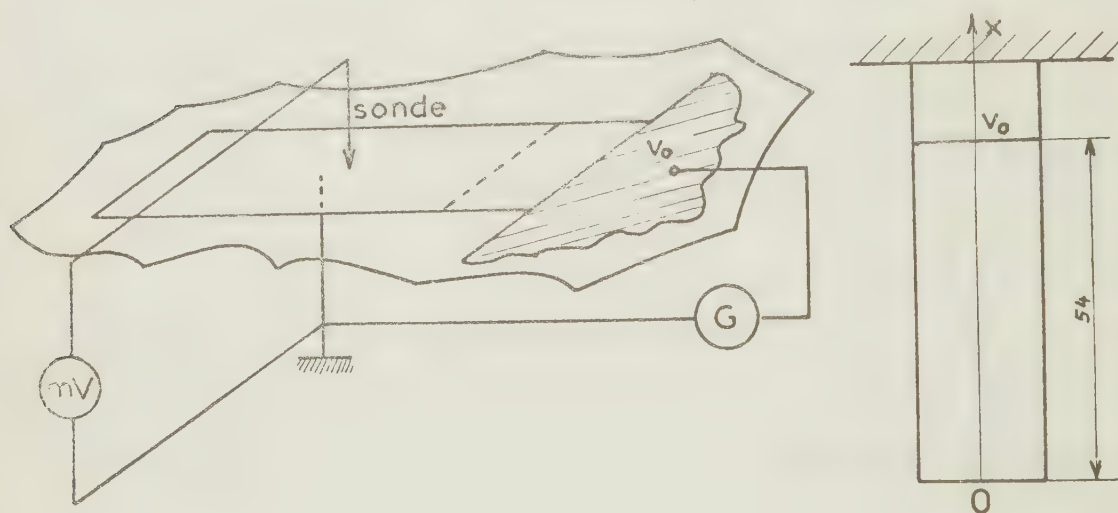


Fig. IV. I. 9.

G : générateur basse fréquence précédemment utilisé.

V : voltmètre Philips 6012 de $10 \text{ M}\Omega$ d'impédance d'entrée.

S : sonde d'une capacité de 3 pF , montée sur une platine de microscope qui permet des déplacements suivant deux directions perpendiculaires, mesurés par des verniers au $1/10^{\text{ème}}$ de mm .

Résultats :

Les mesures ont été effectuées sur la ligne médiane de l'image, les équipotentiels restant parallèles au fond de l'encoche, comme le prévoit la théorie.

Conditions des mesures : $\rho'/h = 1,25 \text{ M}\Omega$

$$\varepsilon/d = 1,69 \cdot 10^{-6}$$

$F = 1000 \text{ Hz}$, ce qui correspond à

x_{mm}	φ_r	v/v_o	$\frac{\Delta\varphi_r}{\varphi_r}$	x_{mm}	φ_r	v/v_o	$\frac{\Delta\varphi_r}{\varphi_r}$
1	0,0313	0,0344	10 %	13	0,0405	0,035	13,5%
2	0,0313	0,0353	12,5%	14	0,0433	0,035	19%
3	0,0313	0,0283	9,6%	15	0,0467	0,04	14,5%
4	0,0314	0,0340	7,65%	16	0,05	0,045	10%
5	0,0315	0,0350	11 %	17	0,054	0,05	8%
6	0,0317	0,0290	8,5%	18	0,058	0,055	5%
7	0,0321	0,0290	9,7%	19	0,063	0,07	11%
8	0,0327	0,03	8,3%	20	0,070	0,078	11,5 %
9	0,0336	0,035	4,2%	21	0,075	0,080	6,7 %
10	0,0367	0,038	3,5%	22	0,082	0,086	4,9 %
11	0,0372	0,035	6 %	23	0,089	0,090	1,1 %
12	0,0382	0,035	8,4%	24	0,097	0,095	2,1 %
25	0,105	0,100	5 %	40	0,340	0,370	8,8 %
26	0,114	0,107	6,1%	41	0,367	0,400	9,2 %
27	0,124	0,11	11,3%	42	0,397	0,43	8,3 %
28	0,134	0,12	10,4%	43	0,429	0,47	9,5 %
29	0,145	0,13	10,3%	44	0,463	0,5	8 %
30	0,157	0,14	10,8%	45	0,5	0,561	12,2 %
31	0,17	0,16	5,9%	46	0,54	0,586	8,5 %
32	0,184	0,178	3,2%	47	0,583	0,622	6,7 %
33	0,199	0,2	0,5%	48	0,63	0,714	13,3 %
34	0,215	0,22	2,3%	49	0,68	0,765	12,5 %
35	0,231	0,24	3,9%	50	0,735	0,775	5,5 %
36	0,250	0,27	8,1%	51	0,793	0,816	3 %
37	0,270	0,30	11%	52	0,857	0,888	3,6 %
38	0,291	0,320	10 %	53	0,926	0,959	3,5 %
39	0,312	0,340	9 %	54	1	1	0

IV. I. 3. - Discussion des résultats.

Les résultats obtenus sont fournis pour 3 types de mesures :

- type I : mesure globale de Z_i par la méthode du voltmètre.
- type II : mesure au pont des parties réelles et imaginaires de Z_i .
- type III : mesure de la répartition du potentiel.

Mesure du type I :

Les erreurs commises sont les suivantes :

- erreurs de lecture et erreurs dûes au voltmètre sur la mesure de V et de v . L'erreur de lecture (quart de division) est négligeable devant l'erreur dûe au voltmètre qui est de 2 % sur les gammes utilisées.

- erreur sur le coefficient $K' = \frac{p \varepsilon \Omega}{d}$

cette erreur est

$$\frac{\Delta K'}{K'} = \frac{\Delta \Omega}{\Omega} + \frac{\Delta \varepsilon/d}{\varepsilon/d}$$

L'incertitude sur la fréquence F , donc sur Ω , est fonction du soin avec lequel est réglé le zéro de fréquence du générateur. Dans les meilleures conditions, et compte tenu de la précision du générateur lui-même, on peut estimer cette incertitude à 1 % (vérifiée à l'aide d'un fréquencemètre de précision).

L'incertitude de ε/d , mesuré au pont de Schering, dépend uniquement de la précision avec laquelle on mesure la surface des armatures du condensateur, soit 1 %.

Donc K' est connu à 2 % près.

- erreur sur la fréquence f correspondant à Z'_0

La pulsation ω est déterminée par

$$\frac{\mu \omega}{\rho} = \frac{\rho' \varepsilon}{h d} \Omega$$

donc

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{\Delta \varepsilon / d}{\varepsilon / d} + \frac{\Delta \rho' / h}{\rho' / h} + \frac{\Delta \Omega}{\Omega}$$

La résistance ρ' / h se mesure facilement à 1 % près, donc ω et f sont connus à 3 % près.

On peut alors estimer l'incertitude sur Z'_0 :

$$Z'_0 = j K' Z_i = j K' \frac{V - v}{v} r$$

$$\frac{\Delta Z'_0}{Z'_0} = \frac{\Delta K'}{K'} + \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta v}{v} + \frac{\Delta r}{r}$$

$$\frac{\Delta Z'_0}{Z'_0} = 2 \% + 2 \% + 2 \% + 0,5 \% = 6,5 \%$$

Il faut noter que cette incertitude ne comprend pas les erreurs commises sur les dimensions géométriques de l'image. Celles-ci dépendent uniquement de l'usinage du cache, qui est d'autant plus difficile à réaliser que la forme de l'image est compliquée. Cependant, cet usinage se fait au moins au 1/10ème de millimètre, ce qui conduit à une erreur bien inférieure à 1 %.

Mesure du type II :

Les incertitudes sur K' et sur f restent inchangées, mais la précision sur Z_i est bien meilleure.

L'utilisation du pont décrit précédemment permet de déterminer la partie réelle de Z_i avec une précision de 1 %, et sa partie imaginaire à 2 % près (à cause des capacités parasites). Nous avons donc une erreur de 3 à 4 % sur Z'_0 .

Mesure du type III :

Les erreurs commises portent sur les mesures de x et de v , et sur la détermination de f .

Les déplacements du porte-sonde sont connus au 1/10ème de millimètre près, donc pour de faibles valeurs de x , l'erreur relative atteint 10 %, tandis que pour les grandes valeurs de x , elle est négligeable.

La mesure de v est perturbée par la sonde et par le voltmètre qui introduit 2 % d'erreur. En effet, la résistance de contact sonde-couche est d'autant plus faible que la surface de l'extrémité de la sonde est plus grande, et que la pression qu'elle exerce sur la couche est plus forte. Mais si la surface de la sonde est trop grande, on n'a plus aucune précision sur x , et si la pression exercée sur la couche est trop forte, celle-ci se détériore.

La sonde utilisée réalise un compromis entre ces deux solutions. Quoiqu'il en soit, l'erreur commise sur v est difficilement estimable. Cependant, il est raisonnable de penser qu'elle n'excède pas 5 à 6 %, ce qui donne une incertitude de 10 à 15 % sur v_r , compte tenu de l'erreur sur x et de l'erreur introduite par le voltmètre.

De cette discussion, il ressort que les résultats donnés par l'analogie à constantes réparties sont en accord avec ceux prévus par la théorie.

IV. II. - APPLICATION DE LA METHODE ANALOGIQUE A DES ENCOCHES PARTICULIERES.

IV. II. 1. - Encoche rectangulaire réelle.

Cette encoche diffère de l'encoche théorique par l'isolant qui entoure le conducteur.

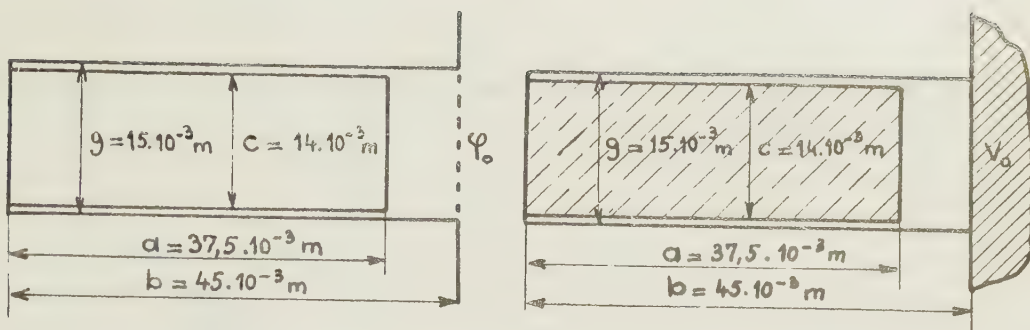


Fig. IV. II. 1

L'impédance objet Z_o se calcule généralement dans ce cas en employant les formules (IV. I. 1), mais avec [3]

$$k = \sqrt{\frac{\omega \mu_o}{2 \rho} \frac{c}{g}}$$

On compare sur la figure IV. II. 2 Z_o calculé par ce procédé à Z'_o déduite de Z_i avec

$$R_o = 0,4.10^{-4} \Omega/m$$

$$x' = \mu_o \omega \frac{b-a}{g} = 0,039.10^{-4} F \Omega/m$$

L'impédance image a été mesurée dans les conditions suivantes :

Concentration de l'alliage :

2,17 % d'Aluminium

1ère série de mesure $\oplus$

$$\rho'/h = 0,92 M \quad \varepsilon/d = 1,34.10^{-6}$$

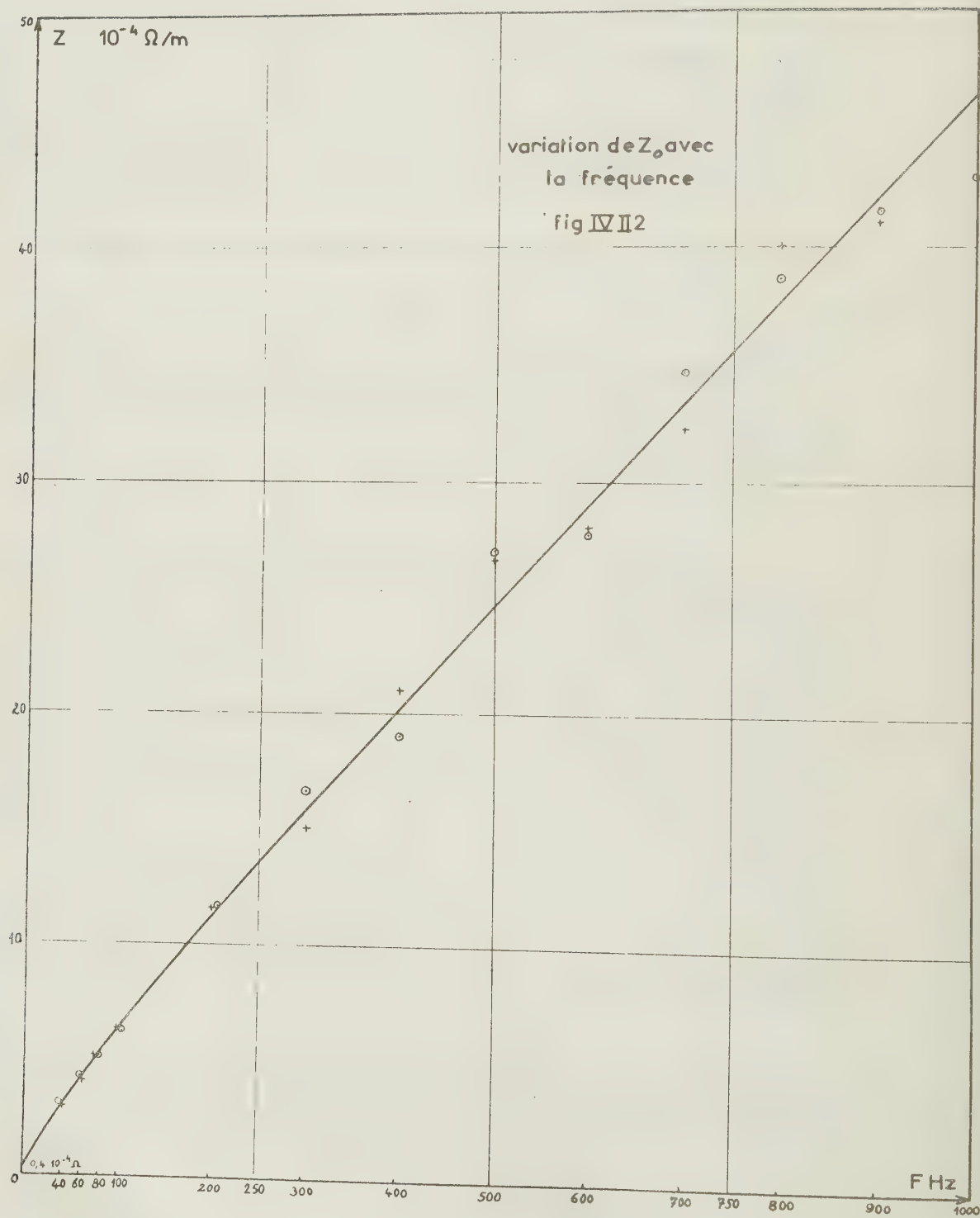
$$\Omega/\omega = 48,5$$

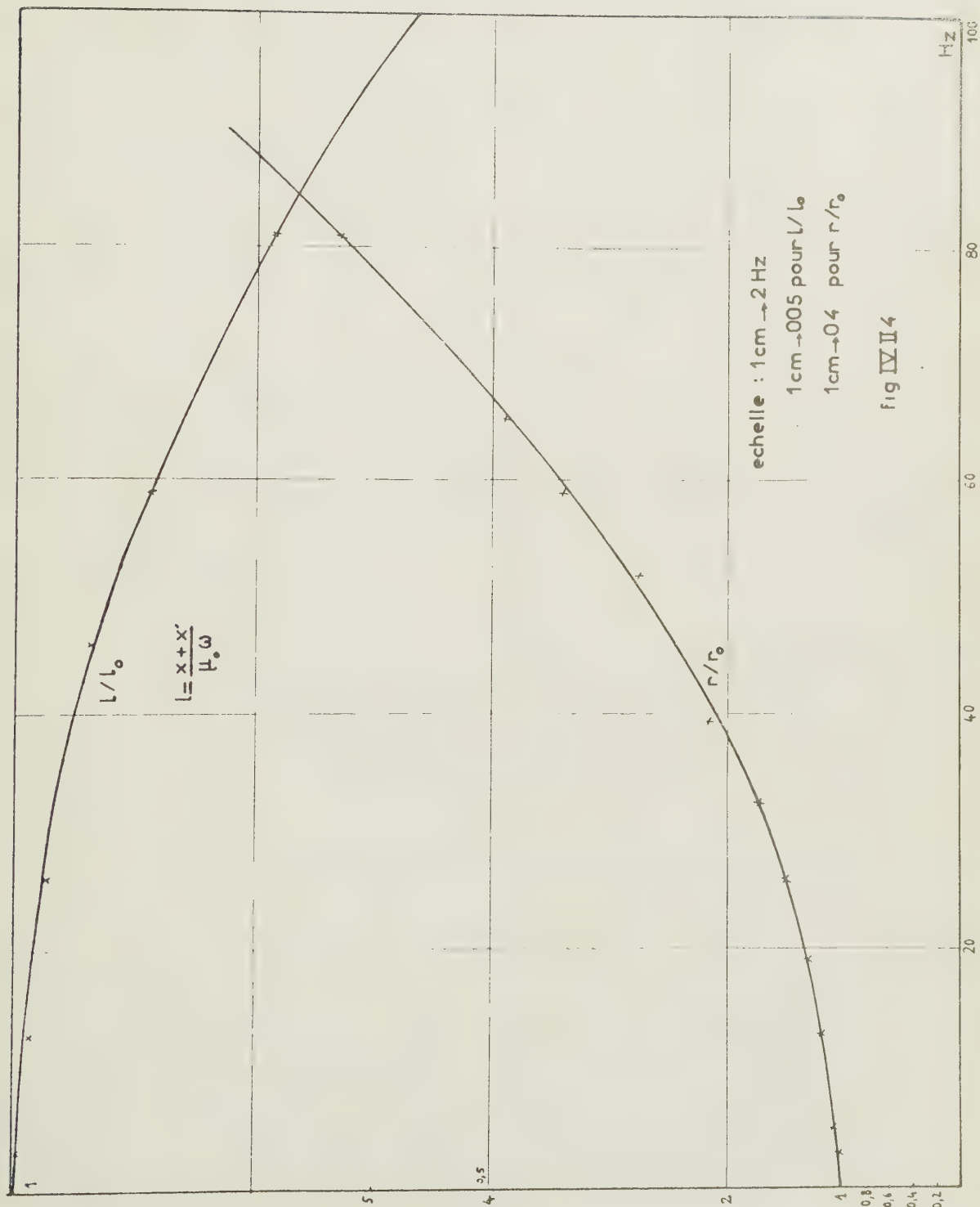
$$1900 \text{ Hz} < F < 50000 \text{ Hz}$$

2ème série de mesure $\ominus$

$$\rho'/h = 1,25 M$$

$$1400 \text{ Hz} < F < 35000 \text{ Hz}$$





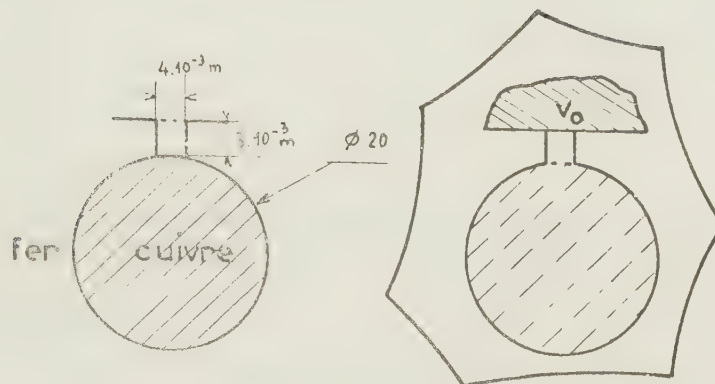
IV. II. 2. - Encoche circulaire.

Fig. IV. II. 3.

La mesure des parties réelles et imaginaires de Z_i , effectuée au pont, nous donne celle de l'impédance objet r et $x+x'$. On en déduit alors les courbes donnant le facteur d'augmentation de résistance r/r_0 , et de diminution d'inductance $1/l_0$ en fonction de la fréquence (Fig. IV. II. 4).

Les mesures ont été effectuées dans les conditions suivantes :

Concentration de l'alliage : 10,6 % d'Aluminium

$$\rho'/h = 0,225 \text{ M}\Omega \quad \epsilon/d = 1,74 \cdot 10^{-6}$$

$$500 \text{ Hz} < F < 15 \text{ kHz}$$

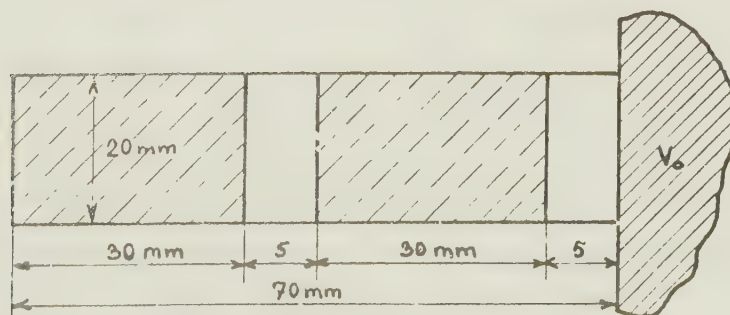
IV. II. 3. - Encoche rectangulaire à deux conducteurs.

Fig. IV. II. 5.

On s'est borné à mesurer l'impédance mutuelle entre les deux conducteurs par la méthode du voltmètre, le montage utilisé est le suivant : (Fig. IV.II. 6)

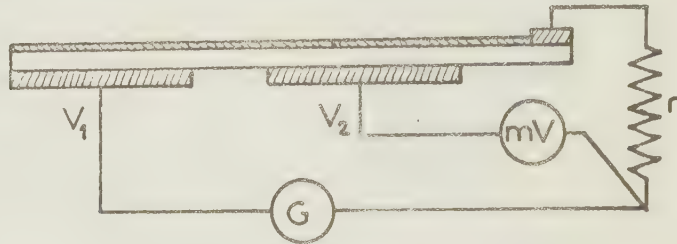


Fig. IV. II. 6.

On a

$$\begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

soit

$$Z_{21} = \frac{V_2}{i_1}$$

Les mesures ont été effectuées dans les conditions suivantes :

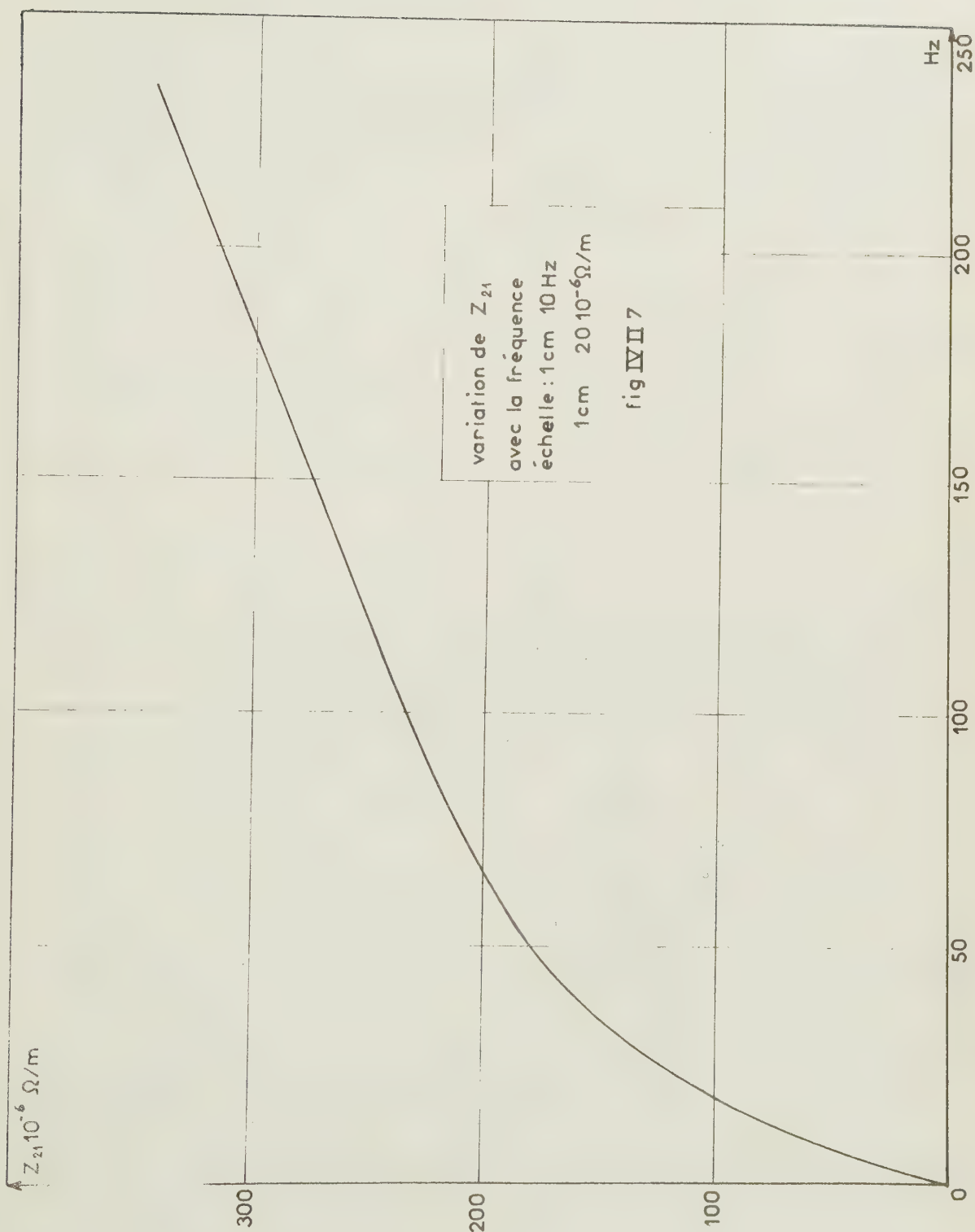
Concentration de l'alliage : 9,35 % d'Aluminium

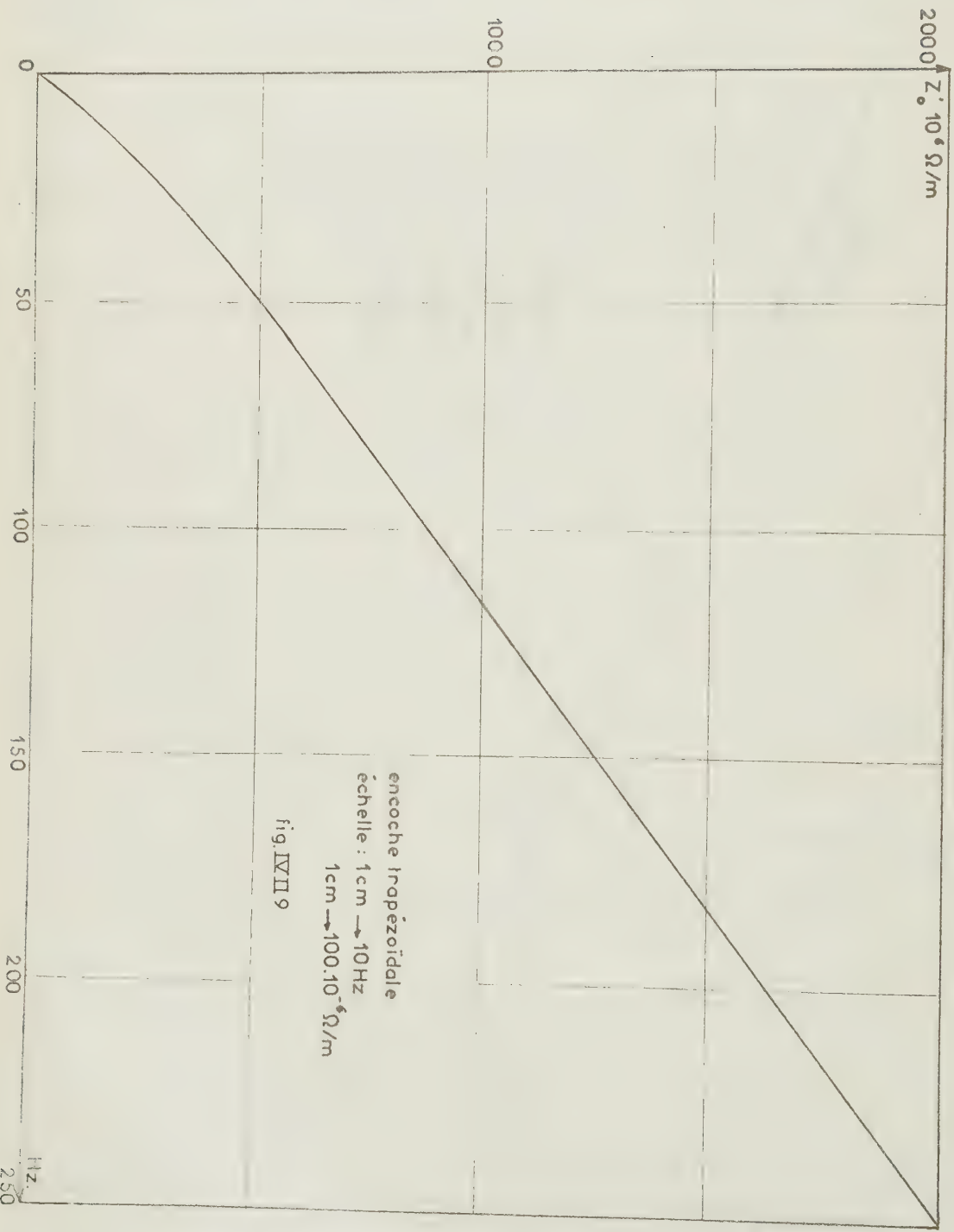
$$\rho'/h = 455 \text{ k}\Omega \quad \epsilon/d = 1,14 \cdot 10^{-6}$$

Les résultats sont portés sur la figure IV. II. 7.

IV. II. 4. - Encoche trapézoïdale.

Les variations de l'impédance Z'_0 déduites de Z_i mesurées par la méthode du voltmètre, sont représentées par la figure IV. II. 9.





encoche trapézoïdale
échelle : 1cm $\rightarrow$ 10 Hz
1cm $\rightarrow$ 100.10⁻⁶ Ω/m

fig. IV 9

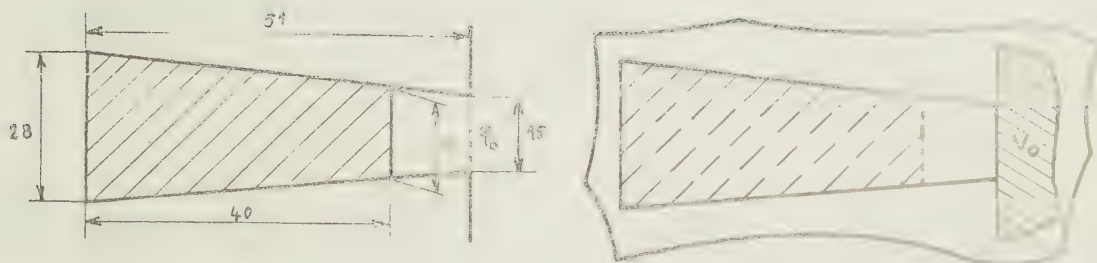


Fig. IV. II. 8.

Conditions de travail :

Concentration de l'alliage :

2,42 % d'Aluminium

$\rho'/h = 1,7 \text{ M}\Omega \text{ } \mathcal{E}/d = 1,55 \cdot 10^{-7}$

IV. III. - APPLICATION DE LA METHODE ANALOGIQUE AU CALCUL DE LA REACTANCE DE FUITE ET DE LA RESISTANCE DES ENROULEMENTS D'UN MOTEUR ASYNCHRONE.

IV. II. 1. - Introduction.

On se propose de déterminer l'impédance de la cage d'écu-reuil d'un moteur asynchrone à encoches profondes, par la méthode analogique. Pour ce type de moteur, l'effet pelliculaire, particuliè-rement important dans les conducteurs rotoriques, dont la section rectangulaire est très allongée, est utilisé pour augmenter la résis-tance de l'enroulement du rotor au démarrage.

Pour traduire ce phénomène, on construit un diagramme d'admittance, différent du diagramme de Blondel.

IV. III. 2. - Construction du diagramme.

Le fonctionnement du moteur asynchrone est traduit par l'un ou l'autre des schémas équivalents suivants :

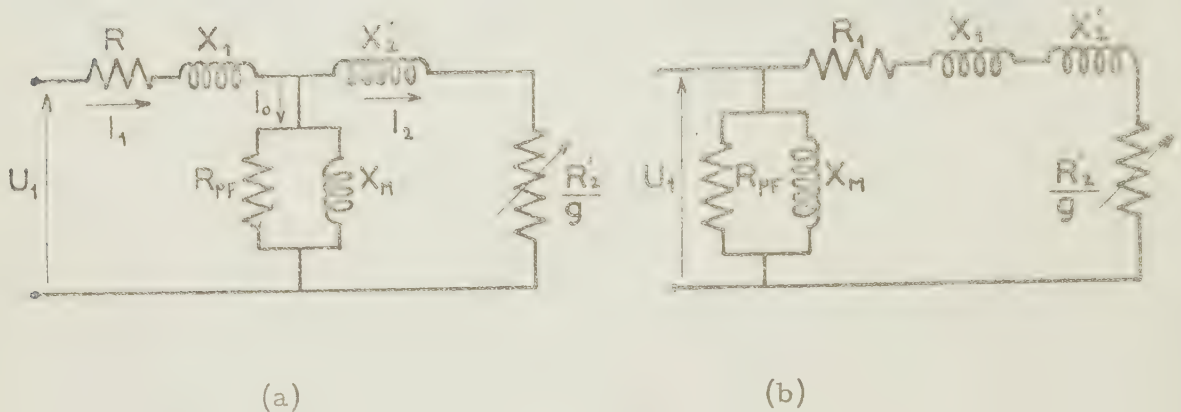


Fig. IV. III. 1.

où X'_2 et R'_2 représentent la réactance de fuite partielle, et la résistance du rotor ramenée au stator.

Cas de la figure IV. III. 1. a. -

On a

$$\overline{U}_1 = (R_1 + j X_1) \overline{I}_1 + \frac{\overline{I}_1}{\overline{Y}_1} = \left(\frac{1}{\overline{Y}_1} + \frac{1}{\overline{Y}_1} \right) \overline{I}_1 = \frac{\overline{I}_1}{\overline{Y}_T}$$

avec

$$\begin{aligned} \overline{Y} &= \overline{Y}_o + \overline{Y}'_2 \\ \overline{Y}'_2 &= \frac{1}{R'_2/g + j X'_2} \\ \overline{Y}_o &= \frac{1}{R_{pF}} - \frac{j}{X_M} \\ \overline{Y}_1 &= \frac{1}{R_1 + j X_1} \end{aligned}$$

Dans le plan complexe, portons $\overline{Y}_o$ à partir de l'origine, traçons la courbe de description d'impédance de $\overline{Z}'_2$ * en prenant comme nouvelle origine l'extrémité 0' de $\overline{Y}_o$, et inversons cette courbe par rapport à 0'.

Nous obtenons ainsi la courbe de description d'admittance de $\overline{Y}'_2$ dont on déduit celle de $\overline{Y}$, en composant $\overline{Y}'_2$ et $\overline{Y}_o$, et celle de $\overline{Y}_T$ en construisant :

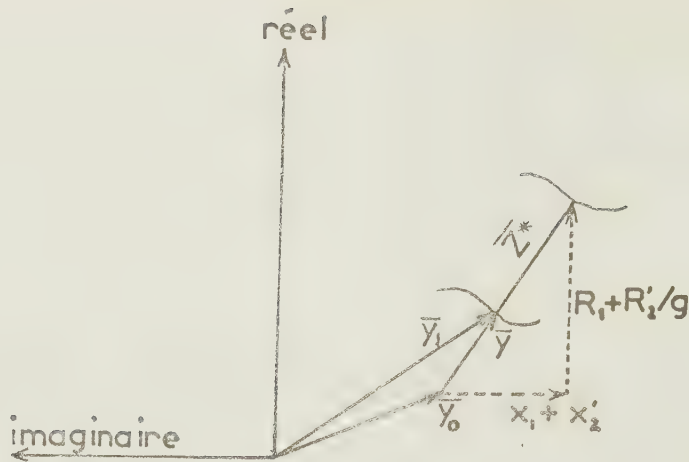


Fig. IV. III. 3.

IV. III. 3. - Etude de l'encoche profonde.

IV. III. 3. a. - Dimensions des encoches images et objets. (Fig. IV. III. a. b)

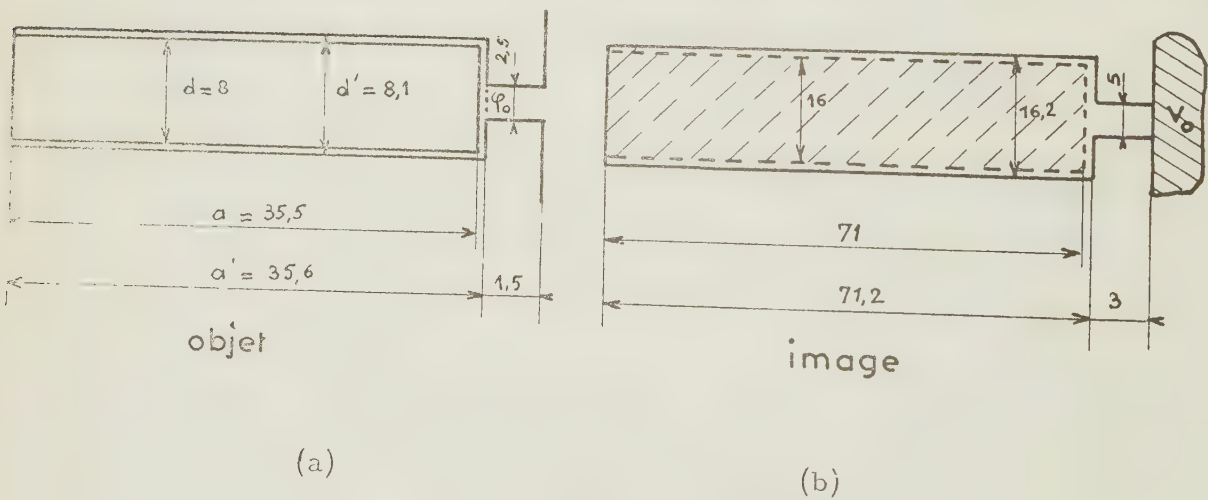
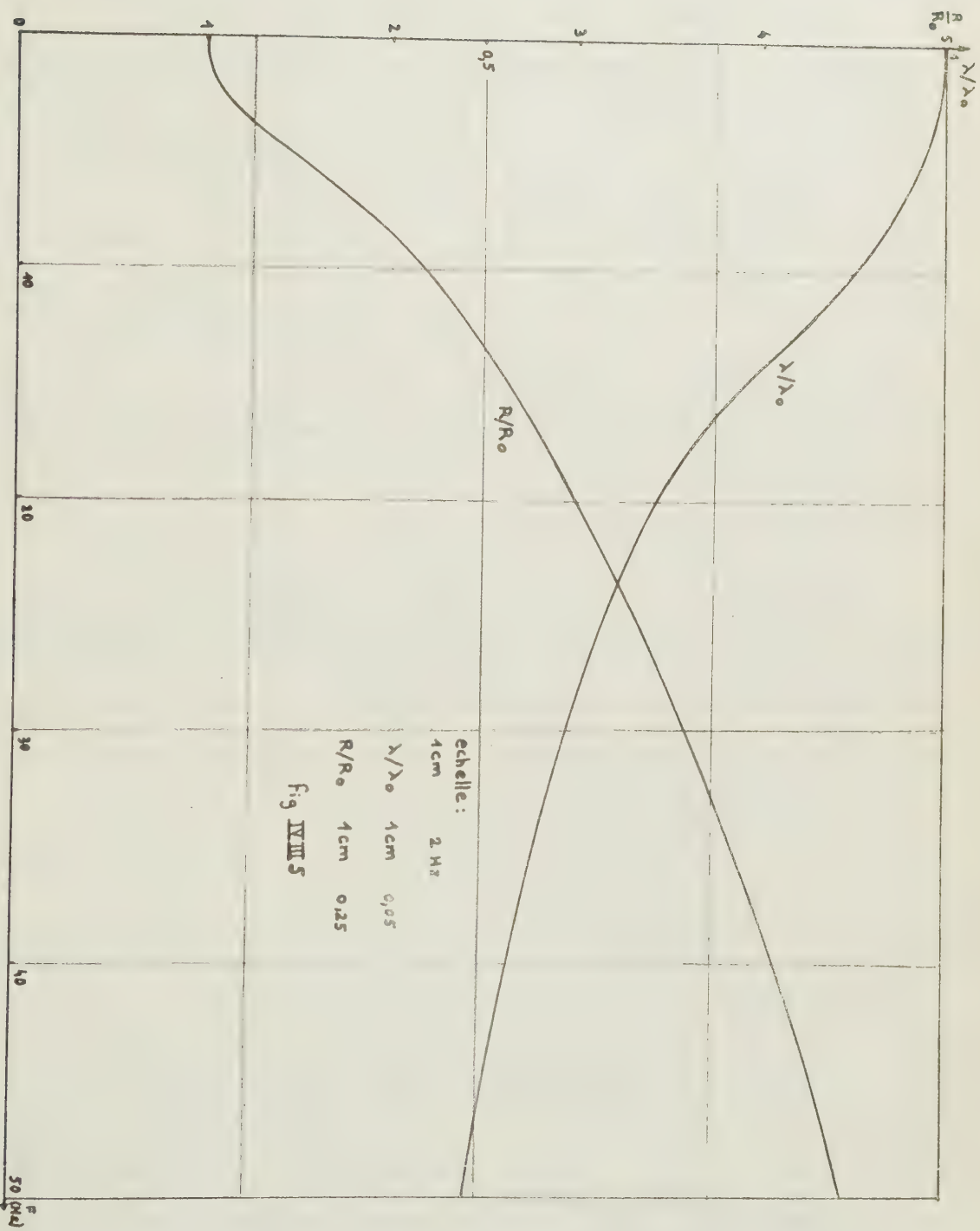


Fig. IV. III. 4.

Les dimensions de l'encoche image sont deux fois plus grandes que celles de l'encoche objet, donc $\lambda = 2$.

IV. III. 3. b. - Mesures et résultats.

La mesure au pont de Z_i donne les parties réelle et imaginaire r_2 et x_2 de l'impédance objet (en tenant compte du facteur λ^2).



De

$$\lambda^2 \frac{\rho' \varepsilon}{h d} \Omega = \frac{\mu \omega}{\rho} \text{ avec } 2\pi f = \omega \text{ et } 2\pi F = \Omega$$

on déduit f correspondant à la fréquence F à laquelle on a fait la mesure de Z_i .

Trois séries de mesures ont été effectuées avec

$$(\rho'/h)_1 = 0,235 \text{ M}\Omega$$

$$(\rho'/h)_2 = 0,240 \text{ M}\Omega \quad \text{et} \quad \varepsilon/d = 1,63 \cdot 10^{-6}$$

$$(\rho'/h)_3 = 0,303 \text{ M}\Omega$$

Nous avons ensuite calculé le rapport $\frac{r_2}{r_0}$ et $\frac{l_2}{l_0}$, l_2 étant défini par

$$l_2 = \frac{x_2}{\mu_0 \omega}$$

l_0 étant la limite vers laquelle tend l_2 quand ω tend vers zéro, et r_0 étant la résistance du conducteur en courant continu. Les valeurs numériques de ces grandeurs sont

$$r_0 = \frac{2,1 \cdot 10^{-8}}{8,35,5 \cdot 10^{-6}} = 73,9 \cdot 10^{-6} \text{ }\Omega/\text{m}$$

et

$$l_0 = 2,065$$

Les variations de r_2/r_0 et de l_2/l_0 en fonction de la fréquence sont représentées sur la figure IV. III. 5.

IV. III. 4. - Tracé du diagramme et résultats.

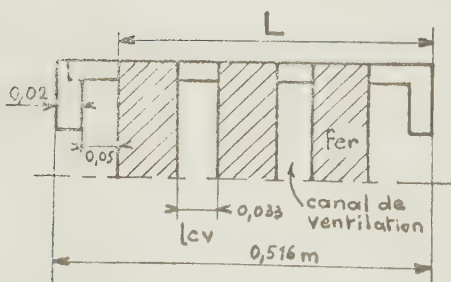


Fig. IV. III. 6.

L'encoche que nous avons étudiée analogiquement appartient à un moteur asynchrone construit par la N. C. G. E. N., dont les caractéristiques sont :

$$U_1 = 5\,500 \text{ Volts} \quad \omega = 100 \pi$$

$$R_1 = 5,21 \Omega \quad X_1 = 18,19 \Omega$$

$$X_M = 898 \Omega \quad R_{pF} = 28,6 \text{ k}\Omega$$

$R'_T = 0,99.10^3$: rapport de transformation stator-rotor.

Les cotes du rotor sont données par la figure IV. III. 6.

Seule la partie du conducteur environné de fer très perméable est soumise à l'effet de peau. Donc, la résistance totale de l'enroulement rotorique est

$$R'_2 = \left[R_{2SK} \frac{r_2}{r_o} + R_{HF} + \frac{R_C}{Ne_2} \right] Ne_2 R'_T$$

avec

Ne_2 = nombre d'encoches rotor

R_{HF} = résistance de la partie des barres située hors du fer.

R_C = résistance des deux couronnes de court-circuit

R_{2SK} = résistance en courant continu de la partie des barres soumise à l'effet de peau.

$$Ne_2 = 38 ; R_{HF} = 9,8.10^{-6} \Omega ; R_C = 288.10^{-6} \Omega ; R_{2SK} = 28,10^{-6} \Omega$$

d'où

$$R'_2 = (1,05 \frac{r_2}{r_o} + 0,65) \Omega$$

De même, la réactance rotor se compose de la réactance X_2 des conducteurs et de la réactance frontale X_{2d} .

En l'absence d'effet Kelvin, la première s'exprime par (Fig. IV. III. 6).

$$X'_{2SK} = \mu_o \omega l_o (L - n l_{cv}) R'_T Ne_2$$

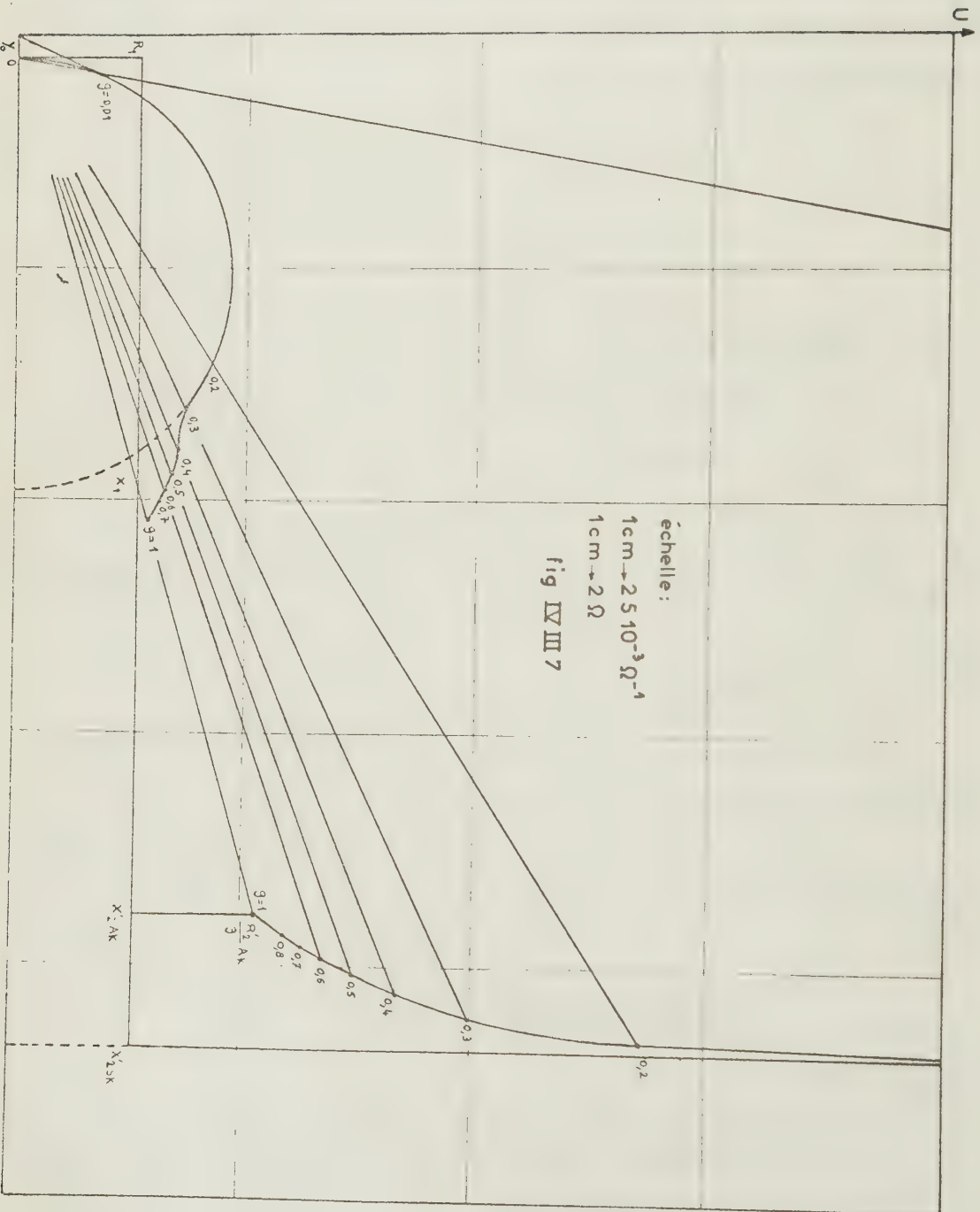
n étant le nombre des canaux de ventilation.

D'où

$$X'_2 = \frac{l_2}{l_o} X'_{2SK} + X'_{2d} = (\frac{l_2}{l_o} 11,1 + 13,3) \Omega$$

Par ailleurs, l'admittance à vide est

$$\bar{Y}_o = \frac{1}{R_{pF}} - \frac{j}{X_M} = (3,5.10^{-2} - j 1,11) 10^{-3} \Omega$$



échelle:
 $1 \text{ cm} \rightarrow 2.5 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1}$
 $1 \text{ cm} \rightarrow 2 \Omega$
 fig IV III 7

On trace alors le diagramme d'admittance (Fig. IV. III. 7), qui se décompose en 2 parties :

- une portion de cercle pour un glissement g , allant de 0 à 0,3.
- une courbe correspondant à $0,3 < g < 1$

Cette forme particulière du diagramme traduit l'influence de l'effet Kelvin, qui devient négligeable quand g est inférieur à 0,3 (à 15 Hz environ).

Connaissant $\overline{Y}$ mesuré sur le diagramme pour un glissement donné, il est alors facile d'en déduire le fonctionnement du moteur par

$$I = \frac{\overline{Y} \overline{U}}{\sqrt{3}}$$

C'est ainsi que nous avons déterminé :

- le courant de court-circuit $I_{cc} = 86,1 \text{ A } (g = 1)$
- le courant normal $I_N = 16,2 \text{ A } (g = 0,01)$
- le courant à vide $I_o = 3,5 \text{ A } (g = 0)$

CONCLUSION

Dans la première partie de ce travail, nous avons montré les difficultés de calcul de la matrice-impédance d'un système de conducteurs cylindriques, même dans les cas très simples. Pour traiter les cas plus complexes, nous avons mis au point une méthode analogique basée sur l'emploi d'un condensateur dont une armature est conductrice, l'autre résistive. Ce système généralise les circuits résistance-capacité à constantes localisées, et ne présente aucune difficulté d'application des conditions aux limites, quelle que soit la forme des conducteurs.

Nous avons d'abord déterminé les équations et les grandeurs du milieu cylindrique objet, et du système image, puis nous avons discuté les limites de validité de cette analogie, pour la vérifier ensuite sur des cas calculables, et l'appliquer à l'étude des conducteurs situés dans des encoches de machines électriques.

Nous nous sommes limités au cas où la perméabilité du milieu entourant les conducteurs était infinie, mais il serait facile d'étendre l'application de la méthode par l'usage de couches résistives images de résistivités diverses.

D'une manière encore plus générale, la méthode décrite peut simuler tous les phénomènes dont les équations sont du type :

$$\Delta \varphi + \mu i = 0$$

$$e = \rho i + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

en particulier tous les problèmes de propagation avec diffusion.

BIBLIOGRAPHIE

- I LIWSCHIZT-GARIK - Trans. A.I.E.E. Part. III A - vol 73 -
1954 - p. 255 à 258.
- II WALDSCHMIDT K. J. - Trans A.I.E.E. Part. III - vol. 78 -
Février 1959 - p. 1437.
- III PUCHTEIN A. F. - Trans. A.I.E.E. Part III - vol. 66 - 1947 -
p. 1315 à 1321.
- IV DEBORNE A. - Bull. de la S.F.E. - Décembre 1951
- 1 GUDEFIN E. - Contribution à l'étude de la magnétostatique
plane au moyen de la cuve rhéographique
Thèse (1958) - p. 6.
- 2 GUDEFIN E. - idem. p. 43
- 3 KOUSKOFF G. - Cours de construction de machine (1952)
non publié - p. 156.
- 4 KOUSKOFF G. - idem - p. 103.
- 5 KOUSKOFF G. - Impédances et admittances linéiques d'une
ligne électrique constituée par un
système de conducteurs parallèles et
de sections circulaires - Thèse (1946)
- 6 GOUDET G. - Les fonctions de Bessel et leurs applications
à la Physique - Masson et Cie (1954)
p. 58.
- 7 ROBERTS J.- Inst. Elect. Eng. Monogr. N° 341 M (1959)
- 8 STRUTT J. O. et VUILLEUMIER - Archiv. für Elektrotechnik
Tome 46 - (1961) p. 259 à 276.
- 9 KUPFMÜLLER - Electricité théorique et appliquée - Dunod -
p. 411
- 10 GILBERT E. O. et E. G. - Trans. A.I.E.E. - Part I - vol 72 -
1953 - p. 345 à 351.
- 11 SCHÖNBACHER K. - E. T. Z. Juillet 1962 - p. 494 à 504.
- 12 TRILLAT J. J., TERTIAN L. et FOURDEUX A. - Le vide -
n° 64 - Juillet-Août 1956
- 13 HONIG R. E. - R. C. A. Revue, 18, 195 - (1957).
- 14 DUSHMAN S. - Scientific foundations of Vacuum Technic -
John Wiley - (1962)-
- 15 COBLENZ A. - Electronics - Novembre 1957 - p. 146-48.
- 16 KITTEL C. - Introduction à la Physique de l'Etat solide -
Dunod (1958) - p. 352.
- 17 TOLANSKY S. - Multiple-Beam Interferometry of surfaces
and films (Oxford at the Clarendon Press)
p. 147
- 18 JAHNKE-EMDE - Tafeln Höherer Funktionen Teubner -
Leipzig (1952)
- 19 Mc. LACHLAN N. W. - Bessel Functions for Engineers
Oxford at the Clarendon Press (1955).

2ème THESE

PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTE:

"Constantes diélectriques dans les
milieux hétérogènes"

VU et APPROUVE,

NANCY, le 18 Avril 1963

Le Doyen
de la Faculté des Sciences

signé : M. ROUBAULT.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 22 Avril 1963

Le Recteur
de l'Académie

signé : P. IMBS

COOPERATIVE DE L'A.G.E.N.

1 bis Rue Gustave Simon NANCY

